Módulo de Instrumentación 2024

Clase 21:
Pendúlo doble: caos en un sistema no lineal

Mario Cosenza

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

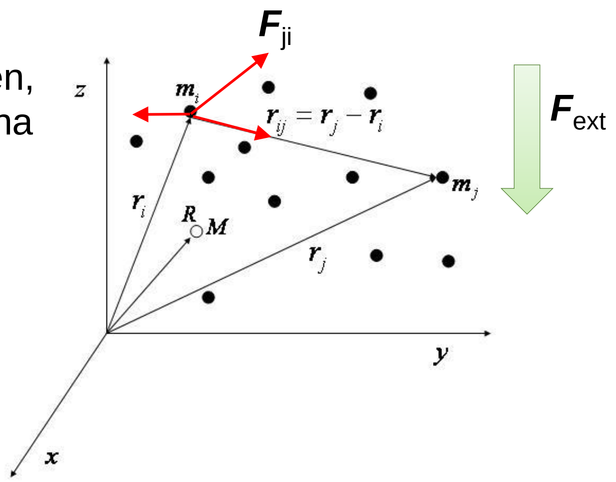
Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

Mecánica breve y concisa

Leyes de Newton describen el movimiento: sistema de i = 1,2,…N partículas

$$\boldsymbol{F}_{\text{ext}}(i) + \sum_{j\neq i}^{N} \boldsymbol{F}_{ji} = m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2}$$

Ec. movimiento para partícula *i*
→ 3*N* ecuaciones diferenciales 2do orden, una para cada componente cartesiana



Formulación Lagrangiana: $\{q_j\}$ j=1,2…,s coordenadas generalizadas o *grados de libertad*.

Sistema caracterizado por función escalar $L(q_j, \dot{q}_j, t) = T - V$ *Lagrangiano* del sistema

T = energía cinética total, V = energía potencial total, ambas en función de $(q_j, \dot{q}_j, t)$

Ecuaciones de Lagrange:
j =1,2…,s

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

s ecuaciones diferenciales 2do orden, una para cada grado de libertad.
→ condición para mínima *acción*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t)\, dt$$

Momento conjugado asociado a q_i : $p_i(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$

Coordenada q_i se denomina *cíclica* si: $\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = 0$

Momento conjugado asociado a una coordenada cíclica q_i es constante: $\frac{dp_i}{dt} = 0 \Longrightarrow \quad p_i(q_j, \dot{q}_j) = \text{cte}$

Se puede demostrar que si: $\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right) = 0 \Longrightarrow \quad E = T + V = \text{cte}$

Sistemas integrables y no integrables

Coordenada cíclica q_i representa una simetría del sistema: si q_i es una coordenada x → simetría de traslación en dirección x.
si q_i es ángulo de rotación alrededor de un eje → simetría axial alrededor de ese eje.

$\partial L/\partial t = 0$ → homogenidad del tiempo.

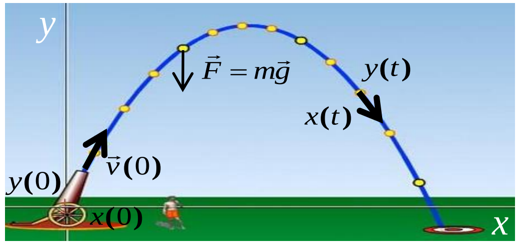
Teorema de Noether: cada simetría de un sistema mecánico tiene asociada una cantidad conservada.

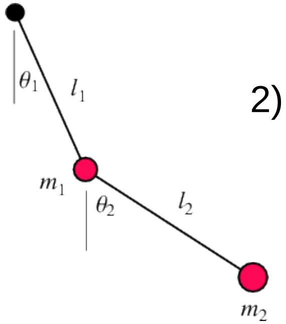
Un sistema puede tener n cantidades conservadas de la forma: $I_k(q_j, \dot{q}_j) = C_k = \text{cte}$ $\quad k = 1,2,\ldots n$

Sistema es *integrable* si: $s = n$. → coordenadas q_j(t) se pueden expresar como integrales de funciones.
Sistema es *no integrable* si: $s > n$. *Superintegrable* si: $s < n$ (existen pocos conocidos).

Ejemplos:

1) Proyectil en campo gravitacional. Grados de libertad s = 2: coordenadas (x,y).
Cantidades conservadas n=2: C_1: p_x, C_2: $E=T+V$.
→ *integrable*.





2) Péndulo doble. s = 2: ángulos θ_1, θ_2
Cantidades conservadas n=1: C_1: $E = T+V$
→ *no integrable.*

3) Partícula libre. s = 3: coordenadas (x,y,z).
Cantidades conservadas n=4: C_1: $E = T+V$, C_2: p_x, C_3: p_y, C_4: p_z
→ *superintegrable.*

Superintegrable: dos cuerpos con interacción gravitacional: $s = 6$, $n = 7$.

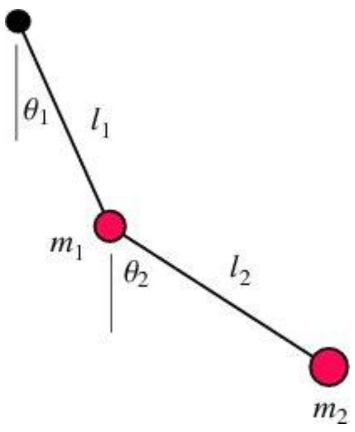
Caos en el péndulo doble

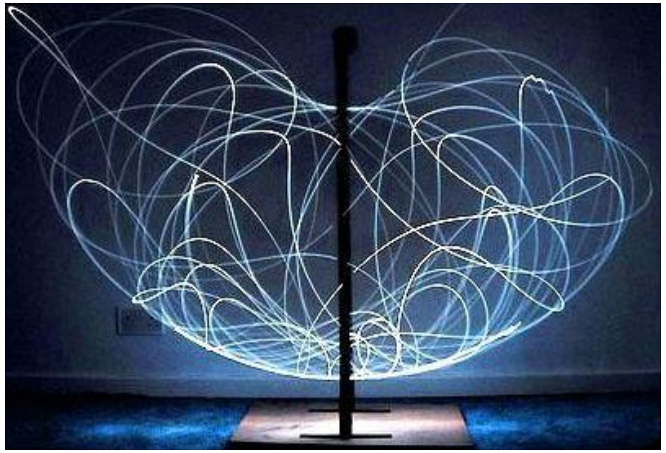
Péndulo doble: sistema determinista. *No integrable.*
Ecuaciones de movimiento para θ_1, θ_2

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{g(\sin\theta_2\cos\Delta\theta - \mu\sin\theta_1) - (l_2\dot{\theta}_2^2 + l_1\dot{\theta}_1^2\cos\Delta\theta)\sin\Delta\theta}{l_1(\mu - \cos^2\Delta\theta)}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{g\mu(\sin\theta_1\cos\Delta\theta - \sin\theta_2) - (\mu l_1\dot{\theta}_1^2 + l_2\dot{\theta}_2^2\cos\Delta\theta)\sin\Delta\theta}{l_2(\mu - \cos^2\Delta\theta)}$$

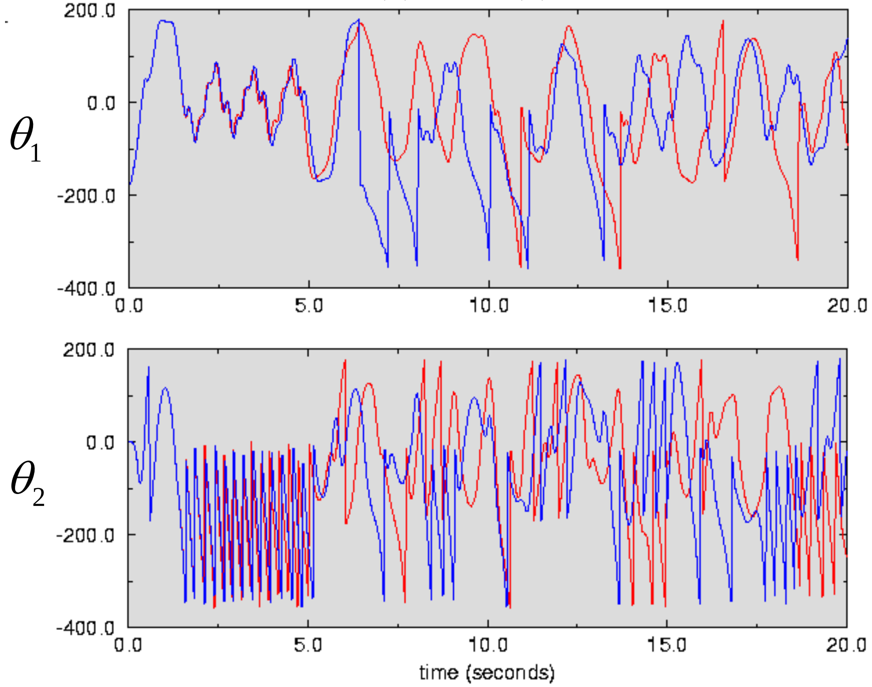
$$\mu = 1 + \frac{m_1}{m_2} \qquad \Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$$





No integrabilidad:
condición necesaria, pero no suficiente para caos.

$\Delta\theta_2(0) = \Delta\theta_2(0) = 10^{-3}$



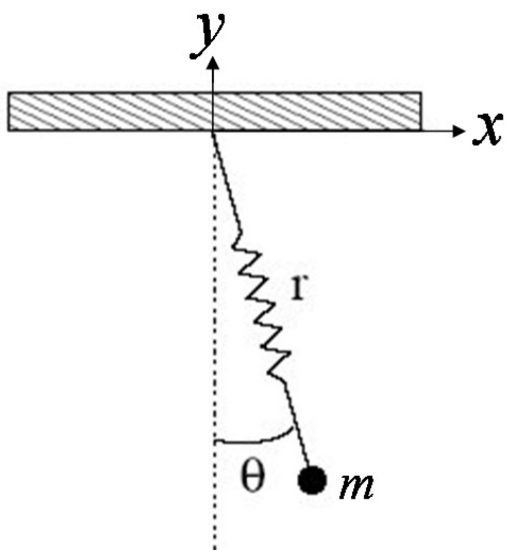
Pequeñas amplitudes
→ linearización

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{g(\theta_2 - \mu\theta_1)}{l_1(\mu - 1)}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{g\mu(\theta_1 - \theta_2)}{l_2(\mu - 1)}$$

Modos de oscilación:
ω_1: en fase, ω_2: antifase
$\omega_2 > \omega_1$

Péndulo de resorte



$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0,$$
$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{k}{m}(r - l) - g\cos\theta = 0.$$