Problemas

Alberto Carramiñana

LA-CoNGA physics, 30 de junio de 2021

1. **Integración del espectro de protones cósmicos**
   Considere la siguiente expresión para el espectro de rayos cósmicos,
   $$\frac{dN}{dE\,d\Omega} = 2.4\,\mathrm{cm^{-2}s^{-1}GeV^{-1}sr^{-1}}\,E^{-2.7}\,, \tag{1}$$
   con E la energía de las partículas cósmicas en GeV, que suponemos válida desde $E = 1\,\mathrm{GeV}$ hasta $1\,\mathrm{PeV}$.

   a) ¿Cuáles son los flujos de partículas y de energía que arriban a un instrumento con campo de visión de 45°?
   b) A $E = 10^{15}\,\mathrm{eV}$ esta ley de potencias se empalma con otra de índice $k = 3.1$. Calcule el flujo de partículas que puede medir un instrumento con el mismo campo de visión en el rango $E = 10^{15}\,\mathrm{eV}$ a $E = 10^{18.5}\,\mathrm{eV}$.
   c) Empleando la ley de potencias del inciso anterior calcule el flujo de partículas con $E > 10^{20}\,\mathrm{eV}$.
   d) Estimar para los tres casos las dimensiones mínimas requeridas para un detector circular que mida 50 partículas en un año.

2. **Aceleración de Fermi**
   Una partícula relativista de masa m y velocidad inicial $\vec{v}_0 = \vec{\beta}_0 c$ tiene una colisión elástica con un espejo magnético de masa $M \gg m$ y velocidad $\vec{V} = -\hat{x}\,Bc$, con $B \ll 1$. Dado el contraste en las dimensiones de ambas entidades, suponemos que la nube no modifica su movimiento.

   a) Arguir que en el marco de referencia de la nube la partícula tiene una energía
   $$\gamma_0' = \Gamma\gamma_0\,(1 - B\beta_0\cos\theta_0)\,,$$

con $\hat{\beta}_0 \cdot \hat{B} = \cos\theta_0$, y que en este marco de referencia la partícula no modifica su energía en la colisión, $\gamma'_1 = \gamma'_0$.

b) Si en el marco de referencia de la nube la partícula cambió de orientación de θ'_0 a θ'_1, mostrar que en el marco de referencia del observador la ganancia o pérdida de energía de la partícula ($\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_0$) depende de los ángulos de entrada (θ_0) y salida (θ'_1) de acuerdo a,

$$\Delta\gamma/\gamma = \Gamma^2 \left\{ B\left(\cos\theta'_1 - \cos\theta_0\right) + B^2\left(1 - \cos\theta_0\cos\theta'_1\right) \right\}, \qquad (2)$$

empleando el límite $\beta_0 \to 1$, $\beta_1 \to 1$.
La ganancia media de energía se obtiene promediando un flujo isotrópico de partículas sobre la configuración de espejos magnéticos.

c) En el caso de una nube molecular moviéndose sobre el eje x el flujo entrante está sesgado por el movimiento de la nube, mientras que el flujo saliente es isotrópico en el marco de referencia de la nube. Mostrar que

$$\left\langle \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \right\rangle \simeq \frac{4}{3} B^2 \,.$$

d) En el caso de un frente de choque, representado por un plano infinito moviéndose en la dirección x, sólo hay entradas frontales en una dirección (digamos $\cos\theta_0 \leq 0$) y salidas en la dirección opuestas ($\cos\theta'_1 \geq 0$). Mostrar que

$$\left\langle \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \right\rangle \simeq \frac{4}{3} B \,,$$

ignorando términos en B^2.

3. **Compton inverso**

Considere la conservación de energía y momento en una interacción entre un fotón y un electrón en un marco de referencia arbitrario,

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 + \omega_0 \\ \gamma_0 \vec{\beta}_0 + \omega_0 \hat{k}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 + \omega_1 \\ \gamma_1 \vec{\beta}_1 + \omega_1 \hat{k}_1 \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

donde se emplean unidades $\hbar = 1, mc^2 = 1$ para simplificar la notación.

a) Eliminando las variables del electrón después de la interacción mostrar que

$$\omega_1 = \frac{\gamma_0\, \omega_0 \left(1 - \vec{\beta}_0 \cdot \hat{k}_0\right)}{\gamma_0 \left(1 - \vec{\beta}_0 \cdot \hat{k}_1\right) + \omega_0 \left(1 - \hat{k}_0 \cdot \hat{k}_1\right)}\,. \tag{4}$$

b) El caso Compton inverso se refiere a electrones altamente relativistas ($\gamma_0 \gg 1$) en interacción con fotones de energía mucho menor. Argüir que en ese caso se puede emplear en general la aproximación $\hat{k}_1 \to \hat{\beta}_0$.

c) Mostrar que siendo así se tiene,

$$\omega_1 \simeq \frac{2\gamma^2\omega_0\,(1 - \beta\cos\theta)}{1 + 2\gamma\omega_0\,(1 - \cos\theta)}\,,$$

con $\cos\theta$ el ángulo de interacción entre el electrón y el fotón.

d) Revisar los casos $\gamma\omega_0 \ll 1,\ \gamma\omega_0 \gg 1$.