Ondas Gravitacionales

- Vamos ha mostrar como se obtiene OG directamente de las ecuaciones del campo.
- Ecuacion de campo de Einstein es:

Tensor de Einstein

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad \text{ó} \quad G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$

Tensor de energia-momento.

Tensor de Ricci

Tensor metrico

Escalar de curvatura de Ricci.

- Tensor de Ricci es obtenido contrayendo el tensor de Riemann:

$$R_{\alpha\beta} = g^{\lambda\rho} R_{\lambda\alpha\rho\beta}$$

- Escalar de Ricci: $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$

donde

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}$$ - Tensor de Riemann.

y $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\partial_{\nu} g_{\beta\mu} + \partial_{\mu} g_{\beta\nu} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}\right)$ - Simbolo de Christoffel.

$$g_{\alpha\beta}(t,\bar{x}) = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(t,\bar{x})$$

donde $h_{\alpha\beta}(t,\bar{x})$ es una pequeña perturbación con

$$|h_{\alpha\beta}(t,\bar{x})| << 1$$

$\eta_{\alpha\beta}$ - metrica plana de Minkowski $= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Definimos $\eta^{\alpha\beta}$ como $\eta^{\alpha\beta}\eta_{\beta\mu} = \delta^{\alpha}_{\mu}$ y la inversa de la metrica es $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$

Como $h_{\alpha\beta}(x)$ es muy pequeño, consideramos terminos lineales en $h_{\alpha\beta}$ y $\partial_\rho h_{\alpha\beta}$.

- Comenzamos con: $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(\partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}\right)\left[\partial_\alpha\left(\eta_{\beta\nu} + h_{\beta\nu}\right) + \partial_\beta\left(\eta_{\alpha\nu} + h_{\alpha\nu}\right) - \partial_\nu\left(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\partial_\alpha h_\beta{}^\mu + \partial_\beta h_\alpha{}^\mu - \partial^\mu h_{\alpha\beta}\right] + O(h^2)$$

- Ahora, Tensor de Riemann:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\rho\lambda}\left[\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} + \underbrace{\Gamma^\lambda{}_{\mu\eta}\Gamma^\eta{}_{\nu\sigma}}_{O[(\partial h)^2]} - \underbrace{\Gamma^\lambda{}_{\nu\eta}\Gamma^\eta{}_{\mu\sigma}}_{O[(\partial h)^2]}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\eta_{\rho\lambda} + h_{\rho\lambda}\right)\left[\partial_\mu\left(\cancel{\partial_\nu h_\sigma{}^\lambda} + \partial_\sigma h_\nu{}^\lambda - \partial^\lambda h_{\nu\sigma}\right) - \partial_\nu\left(\cancel{\partial_\mu h_\sigma{}^\lambda} + \partial_\sigma h_\mu{}^\lambda - \partial^\lambda h_{\mu\sigma}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\mu\partial_\rho h_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma h_{\mu\rho} + \partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\sigma}\right] + O(h^2).$$

El Tensor de Ricci

$$R_{\nu\sigma} = g^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\sigma} = (\underline{\eta^{\mu\rho} - h^{\mu\rho}}) \frac{1}{2}\left[\partial_\mu \partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\mu \partial_\rho h_{\nu\sigma} - \dots\dots \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\partial^\rho \partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial^\rho \partial_\rho h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h^\rho{}_\rho + \partial_\nu \partial_\rho h^\rho{}_\sigma\right] + O(h^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\partial_\rho \partial_\sigma h_\nu{}^\rho + \partial_\nu \partial_\rho h^\rho{}_\sigma - \Box h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h\right]$$

donde $\Box = \partial_\rho \partial^\rho = -\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} + \nabla^2$ y $h = h^\rho{}_\rho$

Escalar de curvatura:

$$R = g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma} = (\underline{\eta^{\nu\sigma} - h^{\nu\sigma}}) \frac{1}{2}\left(\partial_\rho \partial_\sigma h_\nu{}^\rho + \partial_\nu \partial_\rho h^\rho{}_\sigma - \dots\dots\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\partial_\rho \partial_\sigma h^{\sigma\rho} + \partial^\sigma \partial_\rho h^\rho{}_\sigma - \Box h^\sigma{}_\sigma - \partial^\sigma \partial_\sigma h\right] = \left[\partial_\rho \partial_\sigma h^{\sigma\rho} - \Box h\right]$$

El Tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{2}\left[\partial_\mu \partial_\alpha h^\alpha{}_\nu + \partial_\nu \partial_\alpha h^\alpha{}_\mu - \partial_\mu \partial_\nu h - \Box h_{\mu\nu}\right] -$$

$$- \frac{1}{2}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})\left(\partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \Box h\right) = \frac{1}{2}\left[\partial_\mu \partial_\alpha h^\alpha{}_\nu + \partial_\nu \partial_\alpha h^\alpha{}_\mu - \partial_\mu \partial_\nu h -\right.$$

$$\left. - \Box h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\left(\Box h - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta}\right)\right] + O(h^2)$$

Para reescribir de forma mas conveniente, introducimos: $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h$

- La relacion entre $\bar{h}_{\mu\nu}$ y $h_{\alpha\beta}$ es lineal
- Por ello, linearizamos con respecto a $\bar{h}_{\mu\nu}$ y $\partial_\rho \bar{h}_{\mu\nu}$.

Expresamos $h_{\mu\nu}$ en terminos de $\bar{h}_{\mu\nu}$:

$$\bar{h} = \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h\right) = h - \frac{1}{2}\underbrace{\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}}_{4} h = -h$$

$$\Rightarrow h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$$

Remplazamos en tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Big[\partial_\mu\partial_\alpha \bar{h}^\alpha{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\alpha{}_\nu \cancel{\partial_\mu\partial_\alpha \bar{h}} + \partial_\nu\partial_\alpha \bar{h}^\alpha{}_\mu - \frac{1}{2}\delta^\alpha{}_\mu \cancel{\partial_\nu\partial_\alpha \bar{h}} + \cancel{\partial_\mu\partial_\nu \bar{h}}$$

$$+ \Box\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box\bar{h} + \eta_{\mu\nu}\Big(-\Box\bar{h} - \partial_\alpha\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} + \underbrace{\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \bar{h}}_{\frac{1}{2}\Box\bar{h}}\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\partial_\mu\partial_\alpha \bar{h}^\alpha{}_\nu + \partial_\nu\partial_\alpha \bar{h}^\alpha{}_\mu + \Box\bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta}\Big]$$

si el espacio-tiempo admite un sistema de coordenadas casi lorentziana, entonces en el espacio-tiempo admite un numero infinito de coordenadas casi lorentzianas

Describimos 2 clases de transformaciones de coordenadas que llevan un sistema de coordenadas casi lorentziana a otro:

I) Transformacion global de Poincare:

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} x^{\beta} + a^{\alpha}$$

Matriz de transformacion de Lorentz.

Translacion espacio-tiempo

Transformacion de Lorentz satisface:

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}$$ - transf. de Lorentz NO cambia la metrica de Lorentz

La matriz de Lorentz inversa es definido como:

$$(\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\beta} \Lambda^{\beta}{}_{\gamma} = \delta^{\alpha}{}_{\gamma} \; ; \; \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} (\Lambda^{-1})^{\beta}{}_{\gamma} = \delta^{\alpha}{}_{\gamma}$$

de forma tal que: $(\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\mu} (\Lambda^{-1})^{\beta}{}_{\nu} \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}$

Asumimos que las coordinadas x^{α} son casi lorentzianas donde se tiene:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) .$$

Las componentes del tensor métrico en sistema de coordenadas x^α y x'^α viene dado por:

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu} = \left| x^\alpha = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\lambda (x'^\lambda - a^\lambda) \right| =$$

$$= (\Lambda^{-1})^\mu{}_\lambda \delta^\lambda{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\nu{}_\lambda \delta^\lambda{}_\beta (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu} +$$

$$+ (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta h_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta}$$

$$\therefore \underline{h'_{\alpha\beta} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta h_{\mu\nu}}$$

- La perturbación de la métrica $h_{\mu\nu}(x)$ se transforma como un tensor de rango $(0,2)$ bajo las transformaciones de Poincaré.
- las nuevas coord. x'^α también son casi lorentzianas si $(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta$ no son muy grandes o si $\sigma \ll 1$, entonces $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ también implica $|h'_{\mu\nu}| \ll 1$.

Un espacio-tiempo que parece casi plano para un observador todavía parece casi Minkowski para cualquier otro observador en mov. uniforme con respecto al 1er observador

II) otra familia de transf. de coord. que llevan de un sist. de coordenadas casi Minkowski para otro casi plano, es la transf. de coordenadas infinitesimales, llamada como transformaciones de gauge, que tienen la siguiente forma: $x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x)$. con $|\xi^\alpha| \ll 1$, $|\partial_\mu \xi^\nu| \ll 1$

$$\Rightarrow \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha_\beta + \partial_\beta \xi^\alpha \quad ;$$

como: $x^\alpha = x'^\alpha - \xi^\alpha(x) \Rightarrow \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} = \delta^\alpha_\beta - \underbrace{\dfrac{\partial \xi^\alpha(x)}{\partial x'^\beta}}_{\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}} \approx \delta^\alpha_\beta - \partial_\beta \xi^\alpha + O[\partial h^2]$

Asumimos que x^α es casi lorentziana.

$$\Rightarrow g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu} = (\delta^\mu_\alpha - \partial_\beta \xi^\mu)(\delta^\nu_\beta - \partial_\beta \xi^\nu)(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$$

$$= \eta_{\alpha\beta} + \underbrace{h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha}_{} + O[h\partial\xi, (\partial\xi)^2]$$

$$\therefore \underline{h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha}$$

en electromagnetismo:
$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \phi$.

- Una vez que hemos identificado un sist. de coord. casi lorentz, podemos agregar un pequeño vector arbitrario ξ^α a x^α, sin alterar la validez de suposición de que el espacio-tiempo es casi plano.

como $\bar{h}'_{\alpha\beta} = h'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} h' = h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(h - 2\partial_\lambda \xi^\lambda)$

$$= \underline{h_{\alpha\beta}} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha - \underline{\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} h} + \eta_{\alpha\beta}\partial_\lambda \xi^\lambda$$

$$\therefore \bar{h}'_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha + \eta_{\alpha\beta}\partial_\lambda \xi^\lambda$$

Ahora veamos la divergencia de $\bar{h}'_{\alpha\beta}$:

$$\Rightarrow \partial^\alpha \bar{h}'_{\alpha\beta} = \partial^\alpha \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial^\alpha \partial_\alpha \xi_\beta - \cancel{\partial^\alpha \partial_\beta \xi_\alpha} + \underbrace{\cancel{\eta_{\alpha\beta}\partial^\alpha \partial_\lambda \xi^\lambda}}_{\partial_\beta \partial_\lambda \xi^\lambda}$$

$$\therefore \partial^\alpha \bar{h}'_{\alpha\beta} = \partial^\alpha \bar{h}_{\alpha\beta} - \underline{\Box \xi_\beta}$$

Vamos ha introducir el gauge o condicion Armonico, de Donder, Einstein, Hilbert, Fock) que es analogo al gauge de Lorentz en electrodinamica: $\partial^\alpha \bar{h}'_{\alpha\beta} = 0$; $g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$

$$\Rightarrow \underline{\partial^\alpha \bar{h}'_{\alpha\beta} = \Box \xi_\beta}$$

analogo a $\partial_\mu A^\mu = 0$

Esta eleccion es posible ya que la ecuacion de onda en espacio-tiempo de Minkowski tiene la solucion mas general dado por:

$$\xi_\nu = \xi_\nu^{hom} + \int d^4y\, G(x^\rho - y^\rho)\, \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu}(y^\rho).$$

donde ξ_ν^{hom} es la solucion homogenea que satisface $\Box \xi_\nu^{hom} = 0$.

- la condicion de Lorentz o de Donder es conservado, tanto por la transformacion de Poincare (I) y transformacion de gauge (II) si todas las funciones ξ^α satisfacen la ecuacion de onda homogenea: $\underline{\Box \xi^\alpha = 0}$.

  siempre es posible encontrar un sistema de coord. en el cual el gauge de Lorentz o de Donder es valido.

Ahora retornamos a ecuacion de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

donde

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Big[\partial_\mu \underbrace{\partial_\alpha \bar{h}^\alpha{}_\nu}_{=0} - \partial_\nu \underbrace{\partial_\alpha \bar{h}^\alpha{}_\mu}_{=0} - \Box \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \underbrace{\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta}}_{=0}\Big]$$

$$\Rightarrow G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box \bar{h}_{\mu\nu} + O(h^2) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} \Box \bar{h}_{\mu\nu} &= -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \\ \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}}$$

En espacio-tiempo libre de la fuente:

$$\boxed{\begin{aligned} &\left(-\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} + \nabla^2\right) \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \\ &\text{dado} \quad \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \text{ - gauge de Lorentz} \end{aligned}}$$

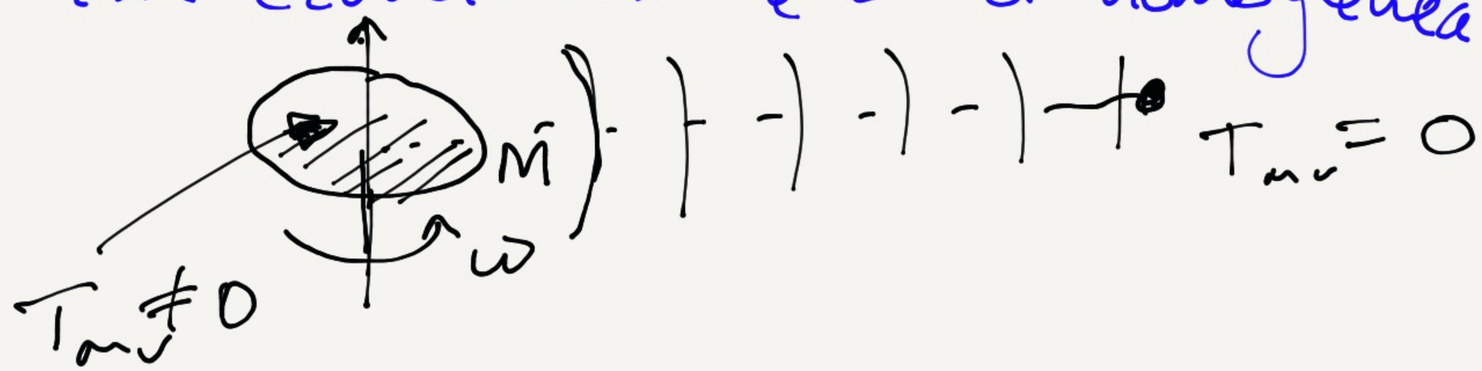
- Perturbacion $\bar{h}_{\mu\nu}$ tiene la forma matematica de una ecuacion de onda
- La perturbacion $\bar{h}_{\mu\nu}$ es una onda que se propaga con la velocidad de luz $v = c$.

Por tanto, las perturbaciones metricas, las "ondas" en el espacio-tiempo producidos por perturbar la metrica, se propagan a la velocidad de la luz como ondas en el espacio libre.

II) OG planos monocromaticos

En vacio, el tensor de energia-momento es cero $T_{\mu\nu}=0$, y ecuaciones de campo linealizado en coordinadas armonicas / gauge de Lorentz, se obtiene ecuaciones de onda homogeneas:

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$



Soluciones dependientes de tiempo de esta ecuacion homogenea pueden ser interpretadas como ondas gravitacionales debiles o planas que se propagan en regiones del espacio-tiempo donde la metrica es casi plano. La solucion mas simple, es la onda plana monocromatica de forma:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\bar{x},t) = \mathrm{Re}\left[A_{\mu\nu} e^{iK_\rho x^\rho}\right] = \frac{1}{2} A_{\mu\nu} e^{iK_\rho x^\rho} + \frac{1}{2} A^*_{\mu\nu} e^{-iK_\rho x^\rho}$$

donde $A_{\mu\nu}$ es la amplitud compleja.

$$K_\alpha x^\alpha = K_0 x^0 + K_i x^i = cK_0 t - \bar{K}\bar{x} = \omega t - \bar{K}\bar{x}$$

K^α - 4-Vector de onda

$\bar{K}$ -3- Vector de onda que señala la direccion de propagacion

$\omega = cK^0 \geq 0$ - frecuencia angular de la onda

$f = \frac{\omega}{2\pi}$ - frecuencia de la onda

$\lambda = \frac{2\pi}{|\bar{K}|}$ - longitud de onda

El gauge de Lorentz para la amplitud es:

$$\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\mu} = 0 \Rightarrow \eta^{\mu\alpha}\partial_\alpha \bar{h}_{\alpha\nu} = Re\left[\eta^{\mu\alpha} A_{\mu\nu}\, iK_\alpha e^{iK_\rho x^\rho}\right] = 0$$

Se cumple si y solo si $\underline{A_{\mu\nu}K^\mu = 0}$ - componentes de $A_{\mu\nu}$ son ortogonales al 4-Vector de onda K^μ.

Por tanto, $\bar{h}_{\mu\nu}K^\nu = 0$ - la solucion completa de onda plana es ortogonal al K^μ.

El K^α es invariante de Lorentz: $K'_\alpha = (\Lambda^{-1})^\beta{}_\alpha K_\beta$.

Como la transformacion de Poincaré mantiene la condicion armonica, tambien mantiene la condicion de ortogonalidad.

La solucion de onda plana reemplazamos en ecuacion de onda homogenea: $\partial^\alpha \partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\mu} = 0$.

$$\Rightarrow \eta^{\sigma\tau} \partial_\sigma \partial_\tau \bar{h}_{\mu\nu} = Re\left[A_{\mu\nu} \eta^{\sigma\tau} i K_\sigma i K_\tau e^{iK_\rho x^\rho}\right] = 0$$

Esta relacion es verdadera para todo x^α, con $A_{\mu\nu} \neq 0$ si y solo si $\eta^{\sigma\tau} K_\sigma K_\tau = 0$

Significa que $K_\sigma = (K_0, K_1, K_2, K_3)$ deben ser vectores tipo luz con respecto a la metrica de MINKOWSKI.

Reescribiendo: $\eta^{\alpha\beta} K_\alpha K_\beta = 0 = K^\beta K_\beta = -K^0 K_0 + \bar{K} \cdot \bar{K}$

mas $\omega = cK^0$ $\quad \therefore \underline{\omega = c|\bar{K}|}$

Es la relacion de despersion para OG e implica que tanto las velocidades del grupo y fase de la onda son iguales a la velocidad de la luz.

III) Gauge transversal y sin Traza

El tensor metrico $g_{\alpha\beta}$ y la perturbacion $h_{\alpha\beta}(x)$ son simetricos:

$$g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(x) \quad : \quad g_{\alpha\beta}(x) = g_{\beta\alpha}(x) \Rightarrow h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}.$$

Por ello $h_{\alpha\beta}$ posee 10 componentes independientes o grados de libertad.

Adicionalmente, la condicion de ortogonalidad $A_{\mu\nu} K^{\mu} = 0$ o la condicion de Lorentz $\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\boxed{\beta}} = 0$ desminuye las componentes independientes de 10 para 6. Por ello $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$ aun posee 6 componentes independientes:

Ecuaciones $A_{\mu\nu} K^{\mu} = 0$ son consicuencias de la condicion de Lorentz $\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$. Esta condicion es mantenida por las transformaciones de gauge $x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x)$, si cada funcion ξ^{α} es la solucion de ecuacion de onda homogenea $\Box \xi^{\alpha} = 0$.

Es posible imponer condiciones adicionales sobre $A_{\mu\nu}$, incluso despues de gauge de Lorentz, ya que aun tenemos libertad adicional en la eleccion de transformaciones de gauge.

Debido a que tenemos a nuestra disposicion 4 funciones ξ^α, podemos usarlos para restrigir aun mas el numero de componentes independientes de la onda plana de 6 para 2. La eleccion de la funcion ξ^α es equivalente a la eleccion de sistema de coordinadas.

Consideremos la transformacion de gauge generado por la funcion ξ^α

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$$

de la siguiente forma: $\xi^\mu(x) = Re[\, C^\mu e^{iK_\rho x^\rho} \,]$

K_ρ - Vector de onda de la solucion de onda plana harmonico

C^μ es complejo

La condicion de Lorentz es tambien satisfecha en nuevas coordinadas: $\Box \xi^\mu = 0$.

Sabemos $\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho$

donde $Re[A'_{\mu\nu} e^{iK_\rho x^\rho}] = Re[(A_{\mu\nu} - iiK_\mu C_\nu - iiK_\nu C_\mu + \eta_{\mu\nu} iiK_\rho C^\rho) \cdot e^{iK_\rho x^\rho}]$.

$$A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + K_\mu C_\nu + K_\nu C_\mu - \eta_{\mu\nu} K_\rho C^\rho.$$

En cada evento en la region del espacio-tiempo cubierto por coordenadas casi lorentzianas y armonicos x^ρ, escogemos un vector unitario de tipo tiempo u^μ, tal que

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2, \quad u^\mu = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I) Realizamos una transformacion de coordenadas de forma que la condicion de gauge de Lorentz se mantiene y tal que

$$\underline{u'^\mu A'_{\mu\boxed{\nu}} = 0}. \quad \text{o de forma equivalente} \quad \underline{u'^\mu \bar{h}'_{\mu\boxed{\nu}} = 0}$$

$$\Rightarrow u^\mu (A_{\mu\nu} + K_\mu C_\nu + K_\nu C_\mu - \eta_{\mu\nu} K_\rho C^\rho) = 0$$

Para componentes espaciales $\nu = j$ considerando $u^\mu = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$u^0 (A_{0j} + K_0 C_j + K_j C_0 - 0) = 0 \Rightarrow C_j = -\frac{1}{K_0}(A_{0j} + K_j C_0).$$

Por tanto C_j son determinados por C_0.

Encontremos alguna restriccion para C_0 a partir de $\nu = 0$:

$$u^0 (A_{00} + 2K_0 C_0 - (-1)\eta^{\rho\sigma} K_\rho C_\sigma) = 0$$

$$\Rightarrow A_{00} + 2K_0 C_0 - K_0 C_0 + \eta^{ij} K_i C_j =$$

$$= A_{00} + K_0 C_0 - \eta^{ij} K_i K_0^{-1} (A_{0j} + K_j C_0) = 0$$

$$\Rightarrow A_{00} + K_0 C_0 - \eta^{ij} K_i K_0^{-1} A_{0j} - \eta^{ij} K_i K_0^{-1} K_j C_0 =$$

$$= \Big/ \eta^{\alpha\beta} K_\alpha K_\beta = 0 = \eta^{00} K_0 K_0 + \eta^{ij} K_i K_j \Rightarrow \eta^{ij} K_i K_j = -\eta_{00} K_0 K_0 \Big/ =$$

$$= A_{00} + \cancel{K_0 C_0} - \eta^{ij} K_i K_0^{-1} A_{0j} + \eta^{00} K_0 \cancel{K_0 K_0^{-1}} C_0 =$$

$$= A_{00} - \eta^{ij} K_i K_0^{-1} A_{0j} = 0 \Rightarrow -K_0 A_{00} + \eta^{ij} K_i A_{0j} = 0$$

$$\therefore \underline{\eta^{\alpha\beta} K_\alpha A_{0\beta} = 0}$$

Así vemos que la condicion $U^\mu A_{\mu\nu} = 0$ satisface el gauge de Lorentz $K^\mu A_{\mu\nu} = 0$, es decir, la condición de Ortogonalidad o Transversalidad.

II) Realizamos transformacion de coordenadas que satisface el gauge de Lorentz de forma tal que:

$\eta^{\mu\nu} A'_{\mu\nu} = 0$ o de forma equivalente $\eta^{\mu\nu} \bar{h}'_{\mu\nu} = 0$

$$\Rightarrow \eta^{\mu\nu} \left(A_{\mu\nu} + K_\mu C_\nu + K_\nu C_\mu - \eta_{\mu\nu} K_\rho C^\rho \right) = 0$$

$$\eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} + 2K_0 C_0 - 2\eta^{ij} K_i C_j = A^\mu{}_\mu + 2K_0 C_0 + 2\eta^{ij} K_i K_0^{-1} (A_{0j} + K_j C_0)$$

$$= A^{\mu}{}_{\mu} + 2K_0 C_0 + 2\eta^{ij} K_i K_0^{-1} A_{0j} - 2\eta^{00} K_0 K_0^{-1} K_0 C_0 = 0$$

$$\Rightarrow A^{\mu}{}_{\mu} + 4K_0 C_0 + 2\eta^{ij} K_i K_0^{-1} A_{0j} = 0$$

$$\therefore \quad C_0 = \frac{-A^{\mu}{}_{\mu} K_0 - 2\eta^{ij} K_i A_{0j}}{4K_0^2}$$

si elegimos C_0 de acuerdo a esta ecuacion y C_j en funcion de C_0 como $C_j = -K_0^{-1}(A_{0j} + K_j C_0)$, entonces ambos condiciones $U^{\mu} A_{\mu\nu} = 0$ y $\eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = 0$ son satisfechas en los nuevas coordinadas.

Esta condicion $\begin{cases} \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = A^{\mu}{}_{\mu} = 0 \\ \eta^{\mu\nu} \bar{h}'_{\mu\nu} = 0 \end{cases}$ se llama gauge o condion SIN TRAZA.

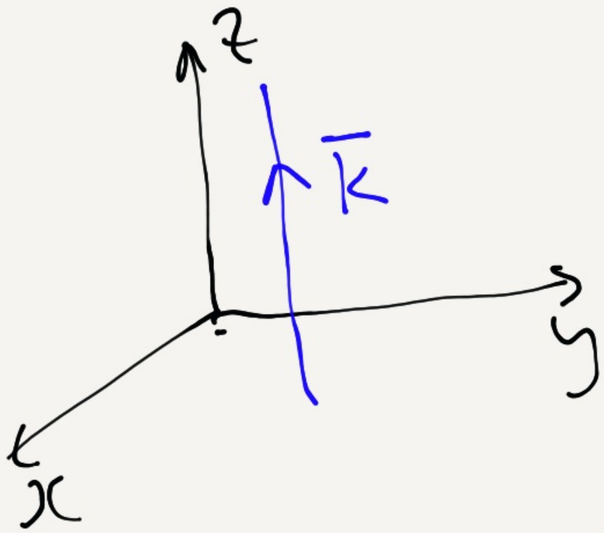
Por tanto, las condiciones

$$U^{\mu} A_{\mu\nu} = 0 \ , \ U'^{\mu} \bar{h}'_{\mu\nu} = 0$$

$$\eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = 0 \ , \ \eta^{\mu\nu} \bar{h}'_{\mu\nu} = 0$$

se llaman gauge TRANSVERSAL y SIN TRAZA o gauge TT.

Consideremos un ejemplo concreto de OG plana que se propaga en la dirección $x^3 = z$, donde las componentes de K^μ son: $[K^\mu] = \left(\frac{\omega}{c}, 0, 0, \frac{\omega}{c}\right)$ donde $\begin{cases} K^0 = K^3 \equiv K = \omega/c \\ K^1 = K^2 = 0 \end{cases}$



con $(U^\mu) = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La amplitud $A_{\mu\nu}$ satisface:

$$0 = K^\mu A_{\mu \boxed{\nu}} = \frac{\omega}{c}\left(A_{0\nu} + A_{3\nu}\right)$$ - gauge de Lorentz - 4 condiciones

$$0 = U^\mu A_{\mu\nu} = c\, A_{0\nu}$$ - gauge de transversalidad - 3 condiciones

$$0 = \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = -A_{00} + A_{11} + A_{22} + A_{33}$$ - gauge sin traza - 1 condición

- Por ello, la amplitud $A_{\alpha\beta}$ posee solo $(10-8) = 2$ componentes independientes ó grados de libertad físicos y corresponden a 2 estados de polarización.

• Consideremos una partícula de test que experimenta la OG en la región casi Lorentziana del espacio-tiempo adoptando el gauge TT.

. como $U^\mu = (c,0,0,0) = \delta^\mu_0 \Rightarrow A_{\mu\nu}U^\nu = A_{\mu\nu}\delta^\nu_0 = A_{\mu 0} = 0$ para todo μ.

· También $K^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, 0, 0, \frac{\omega}{c}\right)$

$$\Rightarrow A_{\mu\nu}K^\nu = 0 = \cancel{A_{\mu 0}}^{\,0}K^0 + A_{\mu 1}\cancel{K^1}^{\,0} + A_{\mu 2}\cancel{K^2}^{\,0} + A_{\mu 3}K^3 = 0$$

como $K^3 \neq 0$ $\therefore$ $\underline{A_{\mu 3} = A_{\mu 3} = 0}$ para todo μ.

No existe la componente de la perturbación de metrica en la dirección de propagación de OG: En el gauge tranverso o ortogonal, la perturbación de la metrica es totalmente ortogonal a la dirección de la propagación de OG.

• Las ecuaciones $A_{\mu 0} = 0$, $A_{\mu 3} = 0$ junto con $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$ implica que las componentes diferentes de $A_{\mu\nu} \neq 0$ son solo A_{11}, A_{22} y $A_{12} = A_{21}$ en gauge TT:

$$\Rightarrow A_{\mu 0} = 0 \;\therefore\; A_{00} = 0$$
$$A_{\mu 3} = 0 \;\therefore\; A_{33} = 0$$
$$\Rightarrow 0 = \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = -A_{00} + A_{11} + A_{22} + A_{33}$$
$$\therefore\; \underline{A_{11} = -A_{22}}$$

Por tanto, las componentes de $A_{\mu\nu}$ en el gauge TT son:

$$A^{TT}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{TT}_{11} & A^{TT}_{12} & 0 \\ 0 & A^{TT}_{12} & -A^{TT}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hay solo 2 componentes diferentes de cero de $A_{\mu\nu}$:

$$\left.\begin{aligned} A^{TT}_{11} &= -A^{TT}_{22} \equiv A_+ \text{ - Modo MAS} \\ A^{TT}_{12} &= A^{TT}_{21} \equiv A_\times \text{ - Modo ASPA} \end{aligned}\right\}$$

hay solo 2 estados de polarizacion independientes.

El hecho de que solo existe las componentes 1 y 2 diferentes de cero demuestra que la OG es transverso u ortogonal a la direccion de propagacion

Reescribimos el gauge TT para la perturbacion de metrica

$$\partial'^{\mu} \bar{h}'_{\mu\nu} = 0, \qquad \eta^{\mu\nu} \bar{h}'_{\mu\nu} = 0.$$

como $u^\mu = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = u'^\mu \bar{h}'_{\mu\nu} = \delta^\mu_0 \bar{h}'_{\mu\nu} = \underline{\bar{h}'_{0\nu} = 0}$ para todo ν.

Si $K^\mu = (\frac{\omega}{c}, 0, 0, \frac{\omega}{c})$ para $K'^\mu \bar{h}'_{\mu\nu} = 0$

$\Rightarrow \frac{\omega}{c}(\bar{h}'_{0\nu} + \bar{h}'_{3\nu}) = 0 \therefore \underline{\bar{h}'_{3\nu} = 0}$ para todo ν.

Usando el gauge Transverso:

$0 = \eta^{\mu\nu} \bar{h}'_{\mu\nu} = -\cancel{\bar{h}'_{00}}^{\,0} + \bar{h}'_{11} + \bar{h}'_{22} + \cancel{\bar{h}'_{33}}^{\,0} \therefore \underline{\bar{h}'_{11} = -\bar{h}'_{22}}$

De la simetría de $\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}'_{\nu\mu} \therefore \underline{\bar{h}'_{12} = \bar{h}'_{21}}$.

Por ello, las componentes de $\bar{h}'_{\mu\nu}$ diferentes de cero son:

$$\left.\begin{aligned} \bar{h}'^{TT}_{11} &= -\bar{h}'^{TT}_{22} \equiv h_+ \text{ - Polarización MAX} \\ \bar{h}'^{TT}_{12} &= \bar{h}'^{TT}_{21} \equiv h_\times \text{ - Polarización ASPA} \end{aligned}\right\}$$

Sabemos que: $\bar{h}'_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h'$

$\Rightarrow \eta^{\mu\nu} \bar{h}'_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} h' = h' - 2h' = -\bar{h}' = 0$

$\therefore \underline{\bar{h}'^{TT}_{\mu\nu} = h'^{TT}_{\mu\nu}}$.

$$\Rightarrow \bar{h}'^{TT}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{h}'^{TT}_{11} & \bar{h}'^{TT}_{12} & 0 \\ 0 & \bar{h}'^{TT}_{21} & \bar{h}'^{TT}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Omitiendo - y ' :

$$h^{TT}_{\mu\nu}(t,\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con:

$$h^{TT}_{11} = Re\left[A^{TT}_{11} e^{ik_\mu x^\mu}\right] = h_+ \cos\left[\omega(t - z/c) + \alpha_+\right]$$

$$h^{TT}_{12} = Re\left[A^{TT}_{12} e^{ik_\mu x^\mu}\right] = h_\times \cos\left[\omega(t - z/c) + \alpha_+\right]$$