LA-CoNGA physics

Teoría: Altas Energías Clase 03(19 del curso)

El Campo de Dirac Prof. José Antonio López Rodríguez

29 de marzo de 2022

El Campo de Dirac

José Antonio López Rodríguez

Universidad Central de Venezuela

29 de marzo de 2022

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

Contenido

Intro

Definiciones

- Recodemos:

$$c = 1, \tag{1}$$

$$\hbar = 1. \tag{2}$$

- Las componentes contravariantes de un vector se escriben de forma usual. La componente 0 es la dirección temporal:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{3}$$

- La matriz $g_{\mu\nu}$ y su inversa $g^{\alpha\nu} g_{\nu\beta} = \delta^\alpha_\beta$:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Definiciones

- Definen las componentes covariantes y el producto invariante (Lorentz):

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3). \tag{5}$$

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu \equiv x \cdot x = (x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (x_i)^2 \equiv (x^0)^2 - (\vec{x})^2. \tag{6}$$

- Las matrices que cumplen $\Lambda^T g \Lambda = g$ definen las transformaciones de Lorentz

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \; g_{\mu\nu} \; \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}. \tag{7}$$

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\mu. \tag{8}$$

- Para todos los vectores y objetos en tres dimensiones se usa la notación de sub-índices, flechas, negrillas. Por ejemplo, $\vec{v}$, $\mathbf{v}$, v_i.

- Las matrices Λ transforman las componentes contravariantes y covariantes para un par de observadores:

$$\tilde{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}. \tag{9}$$

$$\tilde{x}_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} x_{\nu}. \tag{10}$$

- Una transformación de Lorentz en la interpretación **activa** cambia el sistema físico y no al observador:

$$\tilde{A}_{\mu}(x) = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} A_{\nu}(\Lambda^{-1} x). \tag{11}$$

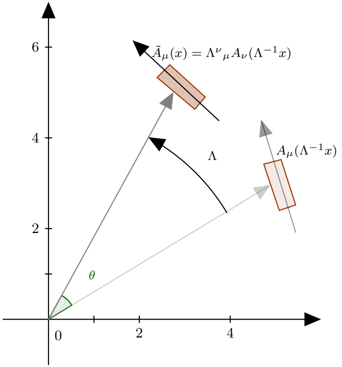

Figura: La transformación genera una nueva configuración válida de campos y fuentes.

Definiciones

- Las coordenadas son naturalmente contravariantes

$$x^{\mu} \tag{12}$$

- Las derivadas son covariantes

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu} \tag{13}$$

- Se cumple

$$\partial_{\nu} x^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu}. \tag{14}$$

$$\partial_{\nu}\ x_{\mu} = \partial_{\nu}\ (g_{\mu\rho} x^{\rho}) = g_{\mu\nu}. \tag{15}$$

- Definimos los operadores

$$\nabla^2 \equiv \sum_{i=1}^{3} \partial_i^2. \tag{16}$$

$$\Box \equiv \partial_0^2 - \nabla^2 = \partial_{\nu} \partial^{\nu}. \tag{17}$$

Variables de Mandelstam

En un proceso $(1) + (2) \longrightarrow (3) + (4)$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \tag{18}$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \tag{19}$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2. \tag{20}$$

Se cumple

$$s + t + u = \sum_{i=1}^{4} m_i^2. \tag{21}$$

Operador momento lineal

- En Mecánica Cuántica:

$$\hat{E} \equiv i\partial_0. \tag{22}$$

$$\hat{\mathbf{p}} \equiv -i\nabla \longrightarrow -i\partial_i. \tag{23}$$

- Además,

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}. \tag{24}$$

- Definimos

$$\hat{p}_\mu \equiv i\partial_\mu \longrightarrow (E, -\hat{\mathbf{p}}). \tag{25}$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = -ig_{ij}. \tag{26}$$

Ecuación de Dirac

Ecuación de Klein-Gordon

- Primer candidato a ecuación relativista:

$$(\Box + m^2)\phi = 0. \tag{27}$$

- Es chévere:
  - Tiene soluciones de ondas planas.
  - Autovalores p_ν.
  - Partícula de masa m.
- No es chévere:
  - La base de soluciones tiene estados de energía negativa.
  - La cantidad candidato a corriente de probabilidad no es definida positiva.

$$J^0 = i(\phi^* \dot{\phi} - \phi \dot{\phi}^*). \tag{28}$$

Ecuación de Dirac

- Podemos evitar el problema de las energías negativas usando una ecuación relativista de primer orden en todas las derivadas:

$$\hat{E}\psi = (\vec{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m)\psi. \tag{29}$$

  α_i y β es un conjunto de operadores a determinar:
  - Son hermíticos. Conmutan con $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{p}}$ y $\hat{E}$.
  - ψ es un objeto de varias dimensiones. Es un espinor de Dirac.
  - Satisfacen alguna condición de invariancia/covariancia relativista especial.
  - Permiten soluciones de momentum definido y eliminan el problema de las soluciones de energía negativa. densidad de probabilidad, etc.
- Se definen

$$\gamma^\mu \longrightarrow (\beta^{-1}, \beta^{-1}\alpha^i). \tag{30}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \tag{31}$$

- Matrices adjuntas

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0. \tag{32}$$

- Trazas

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu) = \mathrm{tr}(\alpha_i) = \mathrm{tr}(\beta) = 0 \tag{33}$$

Por ejemplo,

$$\mathrm{tr}(\gamma^0) = -\mathrm{tr}((\gamma^1)^2\gamma^0) = -\mathrm{tr}(\gamma^1\gamma^0\gamma^1) = \mathrm{tr}(\gamma^1\gamma^1\gamma^0) = -\mathrm{tr}(\gamma^0). \tag{34}$$

- La ecuación queda

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \tag{35}$$

$$\gamma^\mu \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{36}$$

- Acción:

$$S = \int d^4x \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \tag{37}$$

donde $\bar{\psi}$ (ψ *barra*) es:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0. \tag{38}$$

- La densidad lagrangiana es invariante bajo cambios de fase global $\psi \longrightarrow e^{-i\theta}\psi$.
- La corriente conservada define una carga escalar definida positiva.

$$J^{\mu}_{\theta} = \theta\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi. \tag{39}$$

$$J^{0} = \psi^{\dagger}\psi. \tag{40}$$

$$J^{i} = \psi^{\dagger}\alpha^{i}\psi. \tag{41}$$

Invariancia de Lorentz

- Sería chévere que haya invariancia Lorentz de la densidad lagrangiana y de la ecuación de Dirac.
  - $\bar{\psi}\psi$ debe ser un escalar.
  - $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ debe ser un 4-vector.
- Se propone una forma para las transformaciones

$$\tilde{\psi} = \Lambda_{\psi}\psi = e^{-\frac{i\omega_{\alpha\beta}}{2}S^{\alpha\beta}}\psi. \tag{42}$$

$$\tilde{\psi}(x') = \Lambda_{\psi}\psi(\Lambda^{-1}x'). \tag{43}$$

$$\tilde{\psi}(\Lambda x) = \Lambda_{\psi}\psi(x). \tag{44}$$

- Los operadores de transformación deben satisfacer:

$$\Lambda_{\psi}^{-1} = \gamma^0 \Lambda_{\psi}^{\dagger} \gamma^0. \tag{45}$$

$$\left(S^{\alpha\beta}\right)^{\dagger} = \gamma^0 S^{\alpha\beta} \gamma^0. \tag{46}$$

- Además,

$$\left[S^{\alpha\beta}, \gamma^{\nu}\right] = -(M^{\alpha\beta})^{\nu}{}_{\mu} \gamma^{\mu}, \tag{47}$$

donde,

$$\left(M^{\alpha\beta}\right)^{\nu}{}_{\mu} \equiv i \left(g^{\alpha\nu} \delta^{\beta}_{\mu} - g^{\beta\nu} \delta^{\alpha}_{\mu}\right). \tag{48}$$

- Definimos

$$S^{\alpha\beta} \equiv \frac{i}{4} \left[\gamma^{\alpha}, \gamma^{\beta}\right]. \tag{49}$$

Cantidades conservadas: Momento lineal

- Invariancia de traslaciones:

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}) = \psi(x). \tag{50}$$

$$\delta x^\mu = \epsilon^\mu; \quad \delta\psi = \delta\bar{\psi} = 0. \tag{51}$$

- La corriente

$$J^\mu_\epsilon = -T^\mu{}_\nu \epsilon^\nu, \tag{52}$$

definimos,

$$J^\mu_\epsilon \equiv -J^\mu{}_\nu \epsilon^\nu. \tag{53}$$

- Queda

$$J^0{}_\nu = T^0{}_\nu \equiv p_\nu = \psi^\dagger(\vec{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}} + \beta m, \hat{\mathbf{p}})\psi. \tag{54}$$

Cantidades conservadas: Momento angular

- Invariancia de rotaciones en un eje $\vec{\theta} = \theta\hat{\theta}$:

$$\tilde{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} \sim x^{\mu} - i\theta_k (L_k)^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} = x^{\mu} + \delta_{\theta}x^{\mu}, \tag{55}$$

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}) = \Lambda_{\psi}\psi(x) \sim \psi - i\theta_k S_k \psi = \psi + \delta_{\theta}\psi, \tag{56}$$

donde

$$(L_k)^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}(M^{ij})^{\mu}{}_{\nu}; \quad S_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}S^{ij}. \tag{57}$$

- La corriente

$$J^{\mu}_{\theta} = \Pi^{\mu}\delta_{\theta}\psi + \bar{\Pi}^{\mu}\delta_{\theta}\bar{\psi} - T^{\mu}{}_{\nu}\delta_{\theta}x^{\nu}. \tag{58}$$

- La carga conservada queda

$$j_k = \psi^{\dagger}(S_k + (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}})_k)\psi. \tag{59}$$

Soluciones a la ecuación de Dirac

Ondas planas

- Queremos buscar soluciones de momentum definido (partícula libre):
$$\psi_p(x) = u(p)e^{-ip\cdot x}. \tag{60}$$
- La única condición es
$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0. \tag{61}$$
- La solución depende de las matrices γ particulares.
- Estrategia popular: ir al sistema en reposo y hacer un boost a la solución de momentum $\mathbf{p}$ arbitrario.

Solución en reposo

- En el sistema en reposo $p_\mu = (E, \vec{0})$:

$$\psi(x) = u(E, \vec{0})e^{-iEx^0}. \tag{62}$$

- La ecuación de u:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(E, \vec{0}) = (\gamma^0 E - m)u(E, \vec{0}) = 0. \tag{63}$$

- Hay 4 soluciones independientes con valores $E = m$ (2 soluciones) y $E = -m$ (2 soluciones).

$$u_{1,2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \quad u_{3,4} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{64}$$

Solución general

$$u_{1,2}(p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \right\} . \tag{65}$$

$$u_{3,4}(p) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} . \tag{66}$$

Bibliografía

Mark Thomson (2013)
Modern particle physics
Cambridge University Press.

Michael Peskin (2018)
An introduction to quantum field theory
CRC press.

http://laconga.redclara.net

contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA **physics**

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea