



LA-CoNGA physics

Teoría: Altas Energías Clase 06/22

Cálculos en QED Prof. José Antonio López Rodríguez

13 de abril de 2023

Electrodinámica Cuántica

José Antonio López Rodríguez

Universidad Central de Venezuela

12 de abril de 2023



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea





Contenido

Recuento

Resumen Proca y proyectores

Trazas γ

Perturbaciones

Reglas de Feynman

Cálculos en teoría de perturbaciones

Cálculos en teoría de perturbaciones

Aniquilación $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$: estructura

Aniquilación $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$

Aniquilación $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$: cálculo de la amplitud

Interacción

Sobre Helicidad y Quiralidad

Estructura de helicidad

Otros casos y correcciones

Otros casos

Renormalización

Recuento



- ▶ El sistema que se debe resolver.
Cuatro ecuaciones de Klein-Gordon masivas y la condición de divergencia nula:

$$(\square + m^2)B_\mu = 0, \quad (1)$$

$$\partial_\nu B^\nu = 0. \quad (2)$$

- ▶ Solución propuesta:

$$B_\mu = \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q)e^{-iq \cdot x}. \quad (3)$$

- ▶ $\lambda = 0 \dots 3$ son las cuatro polarizaciones independientes.
- ▶ La ecuación de movimiento impone la condición:

$$q^2 = m^2. \quad (4)$$

- ▶ La condición de divergencia nula:

$$q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q) = 0. \quad (5)$$



- ▶ Nos interesa obtener una expresión covariante del operador de proyección sobre los estados $q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q) = 0$:

$$\sum_{q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q)=0} (\epsilon_\mu^{(\lambda)})^* \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m^2}\right). \quad (6)$$

Cumple con las propiedades deseadas.



- ▶ La proyección sobre las polarizaciones físicas ($\epsilon^{(i=1,2)}$):

$$\sum_{i=1,2} (\epsilon_{\mu}^{(i)})^* \epsilon_{\nu}^{(i)} = \sum_{\lambda} \zeta^{\lambda} (\epsilon_{\mu}^{(\lambda)})^* \epsilon_{\nu}^{(\lambda)} - (\zeta^0 (\epsilon_{\mu}^{(0)})^* \epsilon_{\nu}^{(0)} + \zeta^3 (\epsilon_{\mu}^{(3)})^* \epsilon_{\nu}^{(3)}). \quad (7)$$

$$\sum_{i=1,2} (\epsilon_{\mu}^{(i)})^* \epsilon_{\nu}^{(i)} = -g_{\mu\nu} + ((\epsilon_{\mu}^{(0)})^* \epsilon_{\nu}^{(0)} - (\epsilon_{\mu}^{(3)})^* \epsilon_{\nu}^{(3)}) = -g_{\mu\nu} + (P_q)_{\mu\nu}, \quad (8)$$

donde $(P_q)_{\mu\nu}$ es el operador de proyección sobre la dirección de q_{μ} .



- ▶ En el cálculo de perturbaciones necesitaremos considerar polarizaciones de fotones que no cumplen la condición *on shell* ($q^2 \neq 0$).
- ▶ En ese caso se puede tomar prestado el resultado del Campo de Proca:

$$\sum_{q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q)=0} (\epsilon_\mu^{(\lambda)})^* \epsilon_\nu^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^3 (\epsilon_\mu^{(i)})^* \epsilon_\nu^{(i)} = -(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}). \quad (9)$$



► Sabemos

$$\sum_{s=1,2} u_s(p) \bar{u}_s(p) = (\gamma^\mu p_\mu + m). \quad (10)$$

$$\sum_{s=1,2} v_s(p) \bar{v}_s(p) = (\gamma^\mu p_\mu - m). \quad (11)$$



$$\text{Tr}(I) = 4 \quad (12)$$

▶ La traza de un número impar de matrices es cero.



$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \quad (13)$$

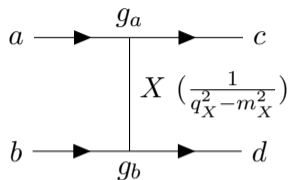


$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu}. \quad (14)$$

▶ La traza de un número impar de matrices $\times \gamma^5$ es cero.



Estructura general de un diagrama de Feynman



- ▶ La partícula X es virtual, no detectable. No es una partícula física.
- ▶ En general

$$q_X^2 - m_X^2 \neq 0. \quad (15)$$

- ▶ En este tipo de diagrama

$$q_X^2 = (p_a - p_c)^2 = (p_d - p_b)^2 = t. \quad (16)$$



Reglas de Feynman: fermiones externos

- ▶ Partícula in



$$u(p)$$

$$e^- \rightarrow \bullet$$

- ▶ Partícula out



$$\bar{u}(p)$$

$$\bullet \rightarrow e^-$$

- ▶ Antipartícula in



$$\bar{v}(p)$$

$$e^+ \rightarrow \bullet$$

- ▶ Antipartícula out



$$v(p)$$

$$\bullet \rightarrow e^+$$



▶ Fotón in



$$\epsilon_{\mu}(q)$$

$$\gamma \rightarrow \bullet$$

▶ Fotón out



$$\epsilon_{\mu}^{*}(q)$$

$$\bullet \rightarrow \gamma$$



Reglas de Feynman: líneas internas y vértice

▶ Intercambio de fotón



$$-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$$



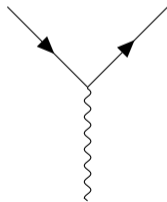
▶ Intercambio de fermión



$$-\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2}$$



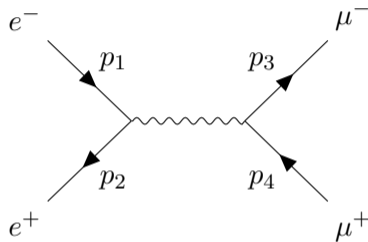
▶ Vértice



$$-iq\gamma^\mu$$



- ▶ Ejemplo: $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$



- ▶ La amplitud

$$\bar{v}(p_2) (iq_e \gamma^\mu) u(p_1) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \bar{u}(p_3) (iq_\mu \gamma^\nu) v(p_4). \quad (17)$$

Cálculos en teoría de perturbaciones

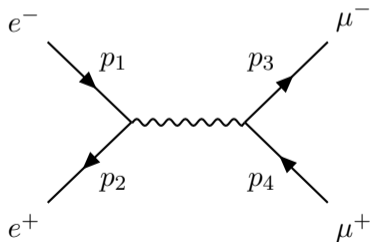


Perturbaciones y términos dominantes

- ▶ Consideramos sistemas con estados inicial y final libres
- ▶ El efecto de la interacción (\mathcal{M}_{fi}) viene descrita por una serie

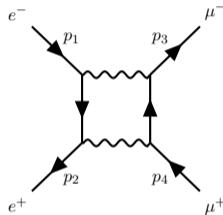
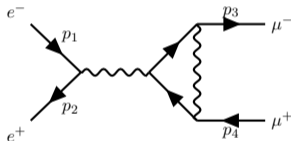
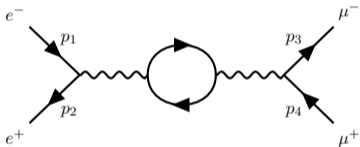
$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{LO} + \sum_j \mathcal{M}_{1,j} \dots \quad (18)$$

- ▶ Ejemplo: en $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ el orden más bajo posible es:





- ▶ Los términos siguientes tienen dos vértices más. Una muestra representativa:



- ▶ Cada nueva línea interna genera lazos y aporta dos vértices nuevos.



- ▶ Los diagramas siempre tienen un número par de vértices.
- ▶ Cada par de vértices aportan un factor de $\alpha = \frac{q^2}{4\pi}$.
- ▶ Definimos $\mathcal{M}_{k,i} = \alpha^{k+1} M_{k,i}$

$$\mathcal{M}_{fi} = \alpha M_{LO} + \alpha^2 \sum_j M_{1,j} \dots \quad (19)$$

- ▶ El módulo cuadrado del elemento de matriz:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \alpha^2 |M_{LO}|^2 + \alpha^3 \sum_j (M_{LO}^* M_{1,j} + M_{LO} M_{1,j}^*) + \dots \quad (20)$$

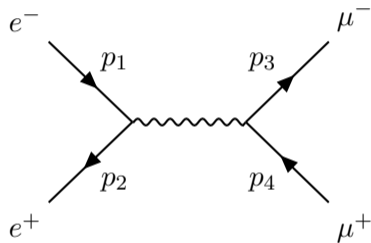
- ▶ Puesto que $\alpha \sim \frac{1}{137}$, la contribución más importante viene del término de orden más bajo.

Aniquilación $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$: estructura



Aniquilación $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$

- ▶ El diagrama a orden más bajo:
- ▶ Ejemplo: en $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ el orden más bajo posible es:



- ▶ La amplitud

$$\mathcal{M} = -\frac{e^2}{q^2} (\bar{v}(p_2)\gamma^\rho u(p_1)) g_{\rho\sigma} (\bar{u}(p_3)\gamma^\sigma v(p_4)). \quad (21)$$



Clasificación en estados de Helicidad

- ▶ Hay 4 combinaciones de helicidad (R y L) independientes en cada estado (inicial y final)

$$(R, R); (L, R); (R, L); (L, L). \quad (22)$$

- ▶ Para una combinación cualquiera en el estado inicial, hay 4 contribuciones en el estado final. Por ejemplo, para un estado inicial (R, R)

$$|\mathcal{M}_{RR}|^2 = |\mathcal{M}_{RR \rightarrow RR}|^2 + |\mathcal{M}_{RR \rightarrow LR}|^2 + |\mathcal{M}_{RR \rightarrow RL}|^2 + |\mathcal{M}_{RR \rightarrow LL}|^2. \quad (23)$$

- ▶ En el caso, muy común, que el estado inicial no esté polarizado, se debe promediar sobre las 4 igualmente probables configuraciones iniciales posibles.

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\text{espines}} |\mathcal{M}|^2. \quad (24)$$

Aniquilación $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$: cálculo de la amplitud



Forma general de la amplitud $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$

- ▶ Desarrollamos la expresión

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\text{espines}} |\mathcal{M}|^2. \quad (25)$$

- ▶ Escribimos la suma sobre todos los espines:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{r,s,r',s'} \frac{e^2}{q^2} (\bar{v}^r(p_2) \gamma^\rho u^s(p_1)) g_{\rho\sigma} (\bar{u}^{s'}(p_3) \gamma^\sigma v^{r'}(p_4)) \\ &\times \left[\frac{e^2}{q^2} (\bar{v}^r(p_2) \gamma^\alpha u^s(p_1)) g_{\alpha\beta} (\bar{u}^{s'}(p_3) \gamma^\beta v^{r'}(p_4)) \right]^\dagger. \end{aligned} \quad (26)$$



► Reorganizando

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{e^4}{4q^4} \sum_{r,s,r',s'} (\bar{v}^r(p_2)\gamma^\sigma u^s(p_1)) \left[(\bar{v}^r(p_2)\gamma^\beta u^s(p_1)) \right]^\dagger \\ &\times (\bar{u}^{s'}(p_3)\gamma_\sigma v^{r'}(p_4)) \left[(\bar{u}^{s'}(p_3)\gamma_\beta v^{r'}(p_4)) \right]^\dagger. \end{aligned} \quad (27)$$

► Usamos la identidad

$$[\bar{\phi}\gamma^\mu\psi]^\dagger = \bar{\psi}\gamma^\mu\phi. \quad (28)$$



- ▶ Queda

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{e^4}{4q^4} \sum_{r,s,r',s'} (\bar{v}^r(p_2) \gamma^\sigma u^s(p_1)) (\bar{u}^s(p_1) \gamma^\beta v^r(p_2)) \\ &\times (\bar{u}^{s'}(p_3) \gamma_\sigma v^{r'}(p_4)) (\bar{v}^{r'}(p_4) \gamma_\beta u^{s'}(p_3)), \end{aligned} \quad (29)$$

- ▶ que puede reescribirse en forma de trazas

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{e^4}{4q^4} \sum_{r,s,r',s'} \text{Tr} \left[(v^r(p_2) \bar{v}^r(p_2)) \gamma^\sigma (u^s(p_1) \bar{u}^s(p_1)) \gamma^\beta \right] \\ &\times \text{Tr} \left[(u^{s'}(p_3) \bar{u}^{s'}(p_3)) \gamma_\sigma (v^{r'}(p_4) \bar{v}^{r'}(p_4)) \gamma_\beta \right]. \end{aligned} \quad (30)$$



- ▶ Usando las relaciones de completitud de las soluciones de Dirac

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr} \left[(\not{p}_2 - m_e) \gamma^\sigma (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\beta \right] \\ &\times \text{Tr} \left[(\not{p}_3 + m_\mu) \gamma_\sigma (\not{p}_4 - m_\mu) \gamma_\beta \right] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^4}{4q^4} \left[\text{Tr} \left(\gamma^\alpha \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\beta \right) p_{2\alpha} p_{1\rho} - m_e^2 \text{Tr} \left(\gamma^\sigma \gamma^\beta \right) \right] \\ &\times \left[\text{Tr} \left(\gamma^\alpha \gamma_\sigma \gamma^\rho \gamma_\beta \right) p_{3\alpha} p_{4\rho} - m_\mu^2 \text{Tr} \left(\gamma_\sigma \gamma_\beta \right) \right]. \end{aligned} \quad (32)$$



- ▶ Usamos las fórmulas de las trazas



$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \quad (33)$$



$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu}. \quad (34)$$

- ▶ Se obtiene la siguiente expresión invariante:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{4e^4}{q^4} [2(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + 2(p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) \\ &+ 2m_\mu^2(p_1 \cdot p_2) + 2m_e^2(p_3 \cdot p_4) + 4m_e^2 m_\mu^2]. \end{aligned} \quad (35)$$



- ▶ En el límite ultra relativista podemos despreciar la contribución de las masas.
Además:

$$q^2 = s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2(p_1 \cdot p_2) \sim 2(p_1 \cdot p_2). \quad (36)$$

$$t = (p_3 - p_1)^2 = p_3^2 + p_1^2 - 2(p_1 \cdot p_3) \sim -2(p_1 \cdot p_3). \quad (37)$$

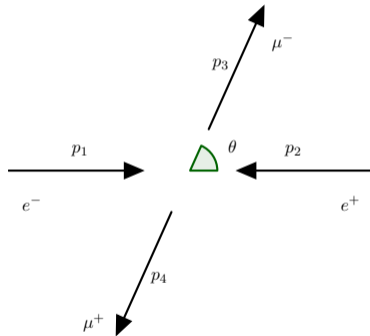
$$u = (p_4 - p_1)^2 = p_4^2 + p_1^2 - 2(p_1 \cdot p_4) \sim -2(p_1 \cdot p_4). \quad (38)$$

- ▶ Se simplifica

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 2e^4 \left(\frac{t^2 + u^2}{s^2} \right). \quad (39)$$



- ▶ La amplitud $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ depende del ángulo de dispersión.



$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = e^4 (1 + \cos^2 \theta). \quad (40)$$

Sobre Helicidad y Quiralidad



Contribuciones no nulas a la amplitud promedio

- ▶ No todas las combinaciones de polarización de estados iniciales y finales contribuyen a la amplitud.
- ▶ Algunas combinaciones son nulas.
- ▶ En el caso $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$, en el límite $m \rightarrow 0$ únicamente sobreviven las combinaciones con espín alineado en los estados inicial y final.

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \left(|\mathcal{M}_{LR \rightarrow LR}|^2 + |\mathcal{M}_{RL \rightarrow RL}|^2 + |\mathcal{M}_{RL \rightarrow LR}|^2 + |\mathcal{M}_{LR \rightarrow RL}|^2 \right) \quad (41)$$

- ▶ Las combinaciones de espín permitidas tienen estados iniciales y finales de momento angular total 1.
- ▶ Es un reflejo de la estructura de espín del campo electromagnético.



- ▶ Ya hemos definido la matriz γ^5 .

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (42)$$

- ▶ Se cumple:

$$(\gamma^5)^2 = I, \quad (43)$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (44)$$

$$\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5. \quad (45)$$

- ▶ En el límite $m \rightarrow 0$, γ^5 conmuta con el Hamiltoniano de Dirac.
- ▶ En ese caso los autoestados de γ^5 también son autoestados de helicidad.

$$\gamma^5 u_\uparrow = +u_\uparrow, \quad \gamma^5 u_\downarrow = -u_\downarrow, \quad \gamma^5 v_\uparrow = -v_\uparrow, \quad \gamma^5 v_\downarrow = +v_\downarrow. \quad (46)$$



- ▶ Se definen los proyectores quirales:

$$P_R = \frac{1}{2}(I + \gamma^5), \quad (47)$$

$$P_L = \frac{1}{2}(I - \gamma^5), \quad (48)$$

- ▶ Los proyectores cumplen

$$P_R u_R = u_R, \quad (49)$$

$$P_L u_L = u_L, \quad (50)$$

$$P_R u_L = P_L u_R = 0, \quad (51)$$

$$P_R v_L = v_L, \quad (52)$$

$$P_L v_R = v_R, \quad (53)$$

$$P_R v_R = P_L v_L = 0, \quad (54)$$



- ▶ Las propiedades de los proyectores explican la cancelación de algunos términos en la amplitud

$$P_{(R,L)}\gamma^\mu = \gamma^\mu P_{(L,R)}, \quad (55)$$

$$\left[P_{(R,L)}, \gamma^0 \gamma^\mu \right] = 0. \quad (56)$$

- ▶ Tenemos, por ejemplo:

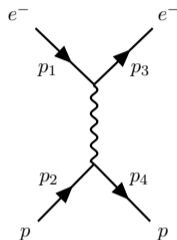
$$\bar{u}_R \gamma^\mu u_L = \overline{P_R u_R} \gamma^\mu P_L u_L = \bar{u}_R \gamma^\mu P_R P_L u_L = 0. \quad (57)$$

$$\bar{u}_R \gamma^\mu v_L = \overline{P_R u_R} \gamma^\mu P_R v_L = \bar{u}_R \gamma^\mu P_R P_R v_L = \bar{u}_R \gamma^\mu v_L. \quad (58)$$

Otros casos y correcciones



- ▶ Es el caso de una partícula dispersada en el potencial de otra:



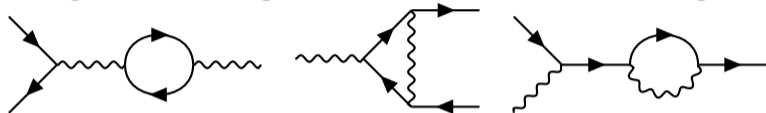
- ▶ La amplitud queda:

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{Qe^2}{q^2} [\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)] g_{\mu\nu} [\bar{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)]. \quad (59)$$

- ▶ Todas son partículas.



- ▶ La magnitud de la carga recibe correcciones radiativas. Algunos contribuyentes:



- ▶ Las contribuciones efectivas provienen del primer diagrama.
- ▶ Contribuciones con líneas internas de fermiones se cancelan.
- ▶ La intensidad de la interacción se hace más fuerte al aumentar la escala de la energía.

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(q_0^2)}{1 - \alpha(q_0^2) \frac{1}{3\pi} \ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}. \quad (60)$$



Mark Thomson (2013)
Modern particle physics
Cambridge University Press.



Michael Peskin (2018)
An introduction to quantum field theory
CRC press.



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongaphysics



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.

