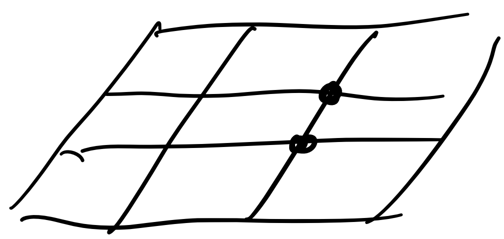
obs

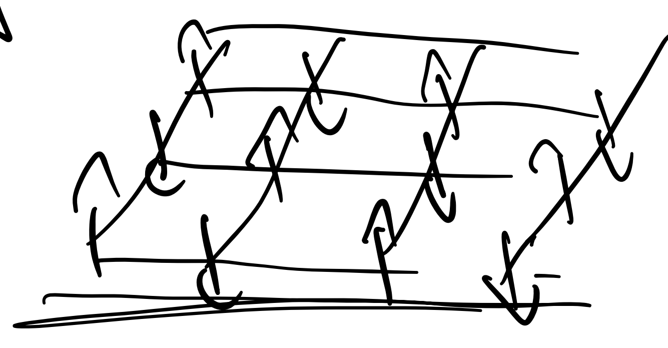
el modelo de Ising
Antiferromagnético (AF)



$$H = J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j$$

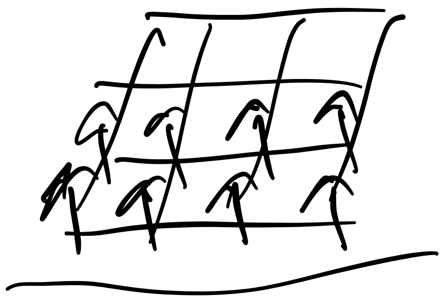
$J > 0$

Config. de mínima energía



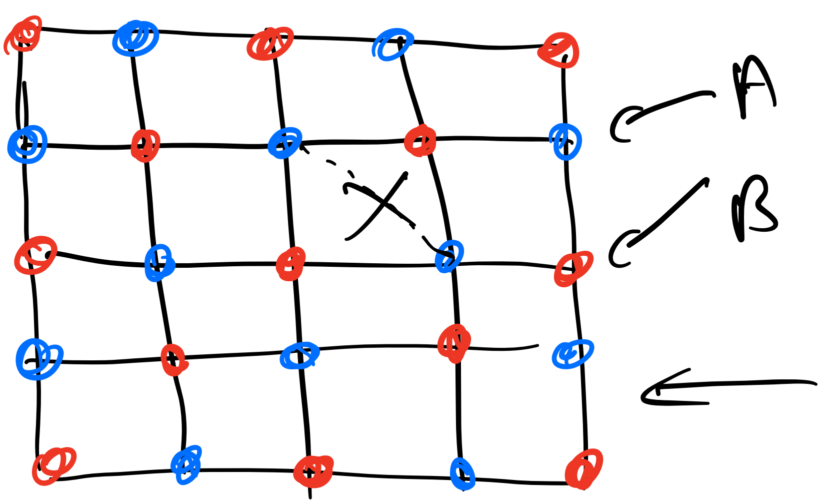
orden
de Néel
o A.F.

en oposición al orden Ferro



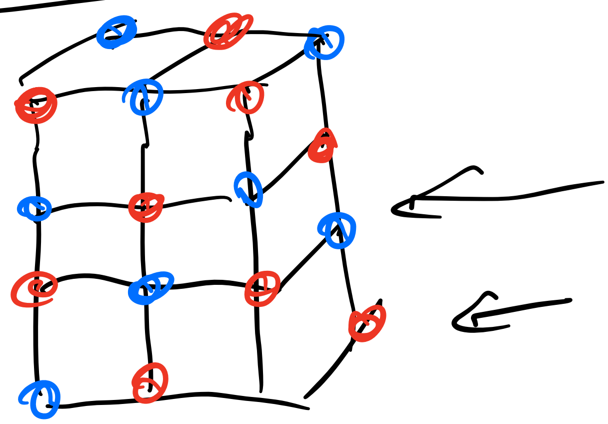
<u>def</u>: una red es <u>bipartita</u> si se puede dividir en 2 subredes A y B tq todo sitio en A está conectado sólo con sitios en B.

<u>ejemplo</u>:

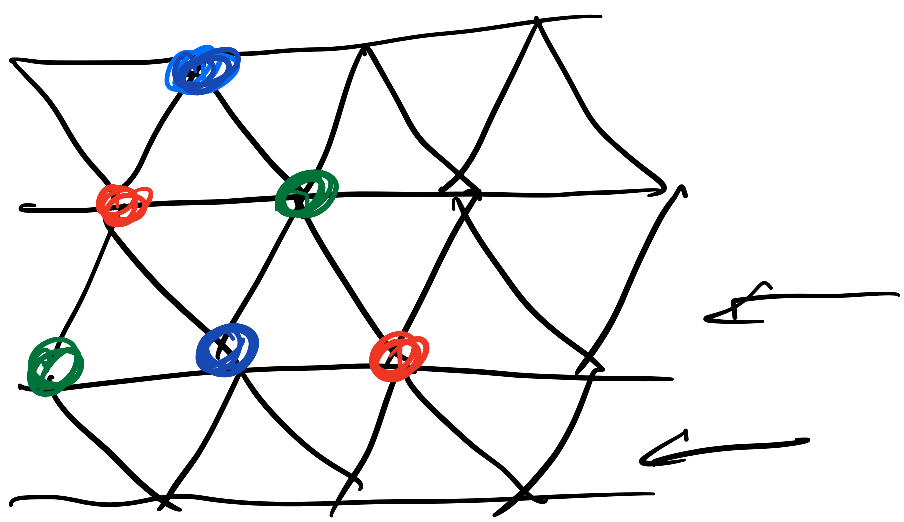


otro ejemplo

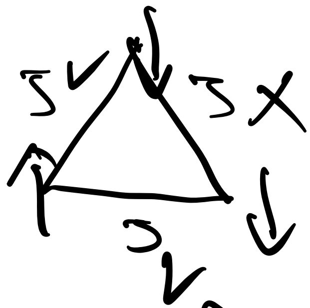
red cúbica



Contra ejemplo:

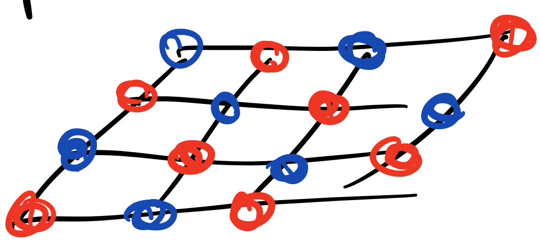


→ frustración!



→ el origen de la frustración magnética.

<u>obs</u> para las redes bi-partitas: los modelos Ferro y A.F. son equivalentes.



$$H_{ferro} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \qquad J > 0$$

$$H_{AF} = J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \qquad J > 0$$

Cambio d variable

$$\sigma_i \rightarrow \tilde{\sigma}_i = \pm 1$$

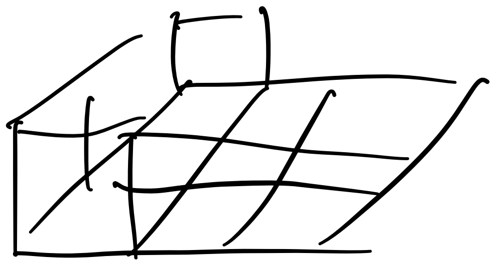
$$\tilde{\sigma}_i = \begin{cases} \sigma_i & \text{si } i \in A \\ -\sigma_i & \text{si } i \in B \end{cases}$$

$$H_{AF} = J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \longrightarrow -J \sum_{\langle ij \rangle} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j$$

$$-J \sum_{\langle ij \rangle} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j = H_{Ferro.}$$

<u>obs</u> únicamente para las redes bi-partitas.

El Modelo de Heisenberg



sitio "i" hay

$\vec{S}_i$, $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_i = 1$ vector de 3 componentes unitarios.

$$\boxed{H = -\sum_{i,j} J_{ij}\, \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j}$$

grupo de simetría : $O(3)$

= grupo de matrices tq M

$$\boxed{M^{\dagger} M = \mathbb{1}_{3\times 3}}$$

obs $(\det M)^2 = 1$

$\det M = \pm 1$

subgrupo : $SO(3) \subset O(3)$

→ las matrices de rotación

$R_{3\times3}$, $R^T R = \mathbb{1}_{3\times3}$

y $\boxed{\det R = 1}$ ←

ejemplo de M tq $M^T M = \mathbb{1}$

y $(\det M) = -1$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$O(3)$ o $SO(3)$ son grupos continuos

↑ grupo de Lie

→ campo magnético

$$\boxed{H = -\sum_{i,j} J_{ij}\, \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \vec{h} \cdot \sum_i \vec{S}_i}$$

obs si $\vec{h} \neq \vec{0}$ la simetría $O(3)$

rota → simetría remanente $O(2)$

$\vec{S}_i \to R\,\vec{S}_i$ R es una rotación alrededor de $\vec{h}$.

el modelo para 1os vecinos

$$H = -J \sum_{\langle i j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

si $J > 0$ → ferro.

obs si la red es bipartita

$H_{Ferro} \longleftrightarrow H_{AF}$

$$\boxed{\vec{S}_i \to \tilde{\vec{S}}_i = \begin{cases} \vec{S}_i & \text{si } i \in A \\ -\vec{S}_i & \text{si } i \in B \end{cases}}$$

obs esta transformación se puede hacer en física clásica. pero NO se puede hacer en mecánica cuántica.

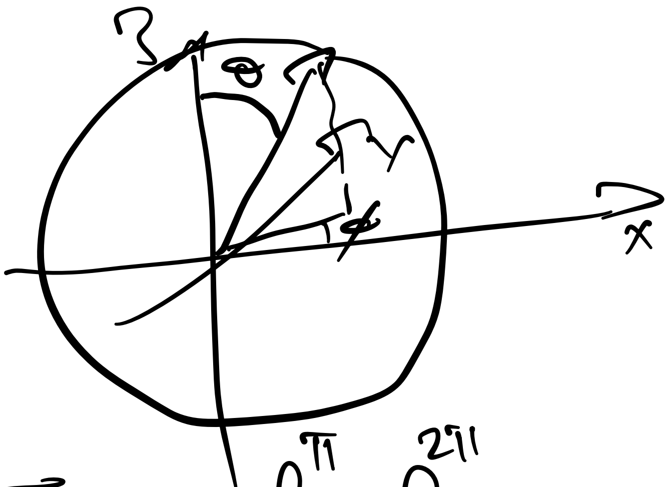
porque

$$\boxed{\underbrace{[S_j^x, S_j^y]}\ = \underset{\sqrt{-1}}{i}\, \hbar\, S_j^z}$$

incompatible con el cambio $\vec{S} \to -\vec{S}$

$$Z(\vec{h}) = \int \prod_j d^2\vec{S}_j \, e^{-\beta H(\vec{h})}$$

aquí $\int \prod_j d^2\vec{S}_j = \prod_j \int$



$$\prod_j \int d^2\vec{S}_j = \prod_j \int_{\theta_j=0}^{\pi} \int_{\phi_j=0}^{2\pi} \sin\theta_j \, d\theta_j \, d\phi_j$$

$$\vec{m}_i = \frac{1}{Z} \int \prod_j d^2\vec{S}_j \, e^{-\beta H} \vec{S}_i$$

$$\vec{M} = \sum_i \vec{m}_i = \frac{1}{Z} \int \prod_j d^2\vec{S}_j \, e^{-\beta H} \sum_i \vec{S}_i$$

$$\boxed{M^\alpha = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial h^\alpha}\ln Z(\vec{h}) \qquad \alpha = x,y,z}$$

funciones de correlación:

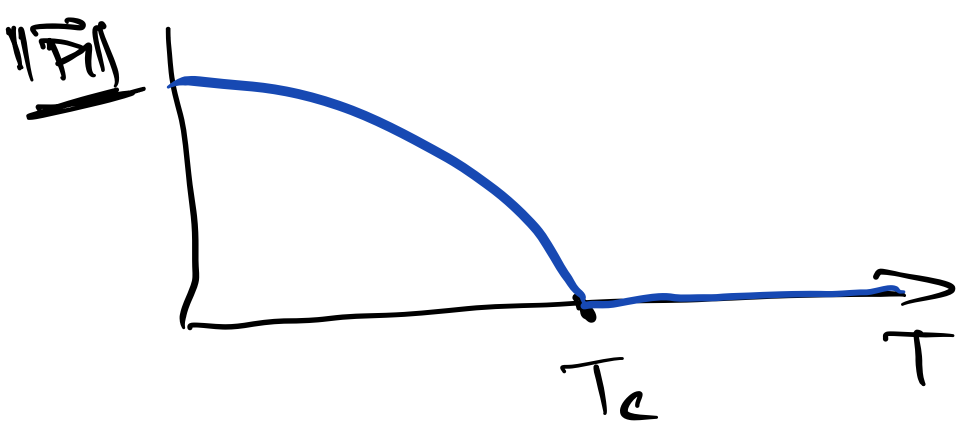
$$\langle \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \rangle$$

ó la conexa $\langle \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \rangle_c$

$$\langle \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \rangle - \langle \vec{S}_i \rangle \cdot \langle \vec{S}_j \rangle$$

transición de fase:

$D \geq 3$



Modelo "xy"

$$H = -\sum_{i,j} J_{ij}\, \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

aquí: $\vec{S}_i = \begin{pmatrix} S_i^x \\ S_i^y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ simetría $O(2)$

$SO(2) \subset O(2)$

rotaciones en 2-D

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

re-escribir con un "campo" complejo

$$\psi_j = S_j^x + i\, S_j^y$$

$- \psi$

$$H = -\sum_{\langle i,j\rangle} J_{ij}\, \mathrm{Re}\{\psi_i^* \psi_j\}$$

$$SO(2) \longleftrightarrow U(1) = \{z \text{ tq } |z| = 1\}$$

$$SO(2) \qquad \vec{S}_j \Rightarrow R\vec{S}_j$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in SO(2)$$

$$\psi_j \Rightarrow \underbrace{e^{i\alpha}}_{\in\, U(1)} \psi_j$$

Sistemas físicos:

* Magnéticos. campo cristalino que fuerza a los momentos magnéticos a estar todos en un mismo plano.

ó modelo de Heisenberg + T.

* la transición metal - superconductor

$H_{BCS} =$

$$\boxed{\sum_{\vec{k},\sigma=\pm1}^{\prime\prime} \varepsilon(\vec{k})\, C^{+}_{\vec{k},\sigma} C_{\vec{k},\sigma} + \sum_{\vec{k},\vec{k}'} V(\vec{k},\vec{k}')\, C^{+}_{\vec{k}\uparrow} C^{+}_{-\vec{k}\downarrow}\, C_{\vec{k}'\uparrow} C_{-\vec{k}'\downarrow}}$$

potencial atractivo.

Superconductividad

$$\boxed{\langle C_{\vec{k}\uparrow} C_{-\vec{k}\downarrow} \rangle \neq 0}$$

H_{BCS} tiene la simetría $U(1)$

$\Rightarrow U(1)$ espontáneamente rota

$\forall \vec{k}, \sigma = \uparrow, \downarrow$

$$\begin{cases} c_{\vec{k},\sigma} \to e^{i\alpha} c_{\vec{k},\sigma} = \tilde{c}_{\vec{k},\sigma} \\ c^\dagger_{\vec{k},\sigma} \to e^{-i\alpha} c^\dagger_{\vec{k},\sigma} = \tilde{c}^\dagger_{\vec{k},\sigma} \end{cases}$$

* Superfluides (par He^4)

$$H = \sum_{\vec{k}} \varepsilon(\vec{k})\, b^\dagger_{\vec{k}} b_{\vec{k}} + V_0 \sum_{\vec{k}'s} b^\dagger_{\vec{k}_1} b^\dagger_{\vec{k}_2} b_{\vec{k}_3} b_{\vec{k}_4}\, \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4)$$

$\to U(1) \quad \forall \vec{k} \to 1$

$$b_{\vec{k}} \to e^{i\alpha} b_{\vec{k}}$$
$$b^\dagger_{\vec{k}} \to e^{-i\alpha} b^\dagger_{\vec{k}}$$

Condensación de B.E.

$$\langle \underline{b_{\vec{k}=\vec{0}}} \rangle \neq 0$$

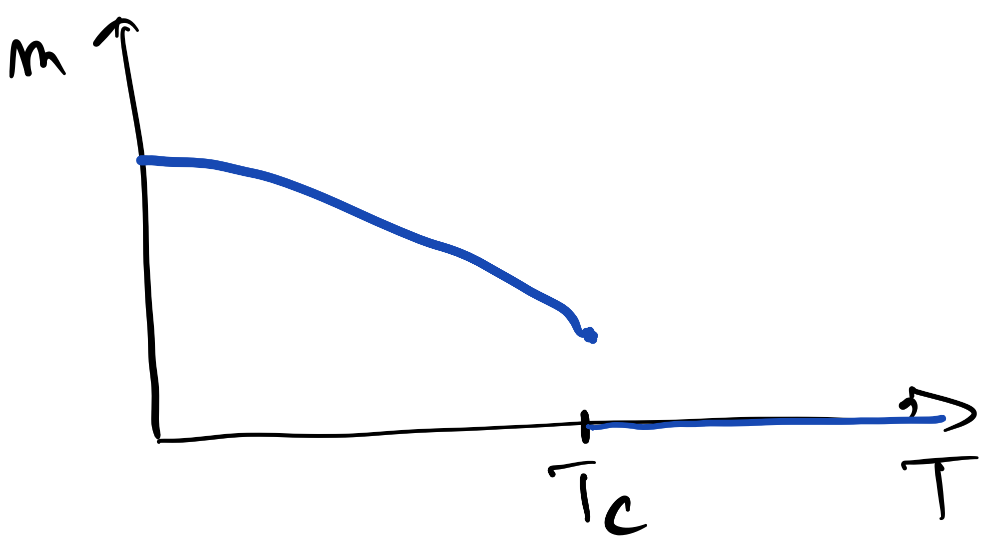
ruptura espontánea de U(1).

Transiciones de 1er, 2o etc orden

<u>n-ésimo orden</u>

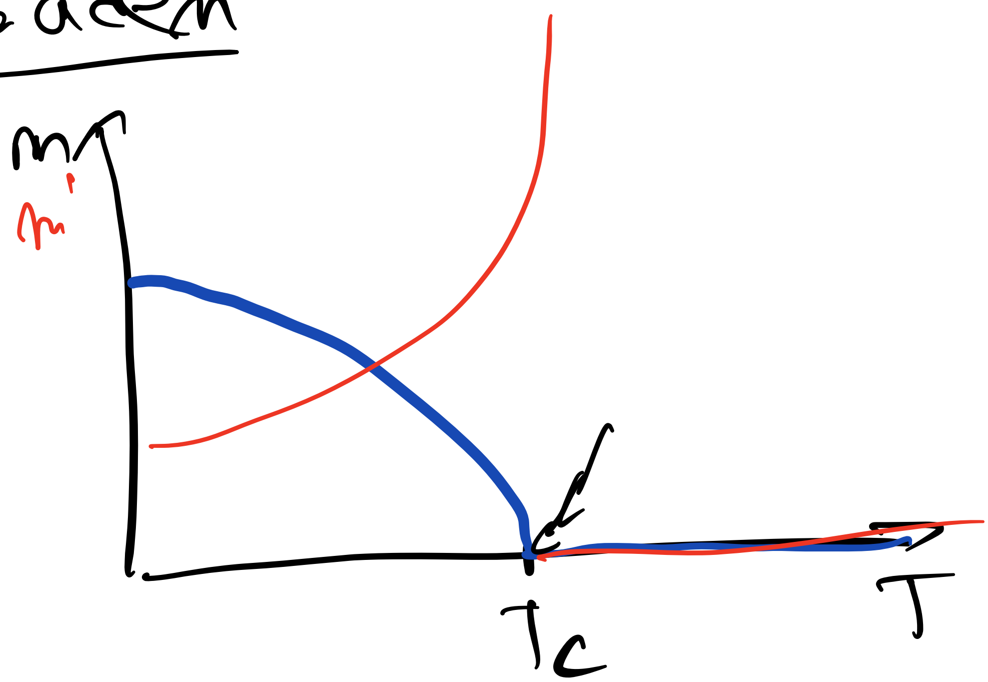
$m = |m|$ Ising
$= \|\vec{m}\|$ Heisenberg
etc.

<u>1er orden</u>



$m(T)$ es discontinua.
en este caso $\xi(T)$ <u>no diverge</u>
cuando $T \to T_c$

<u>2do orden</u>



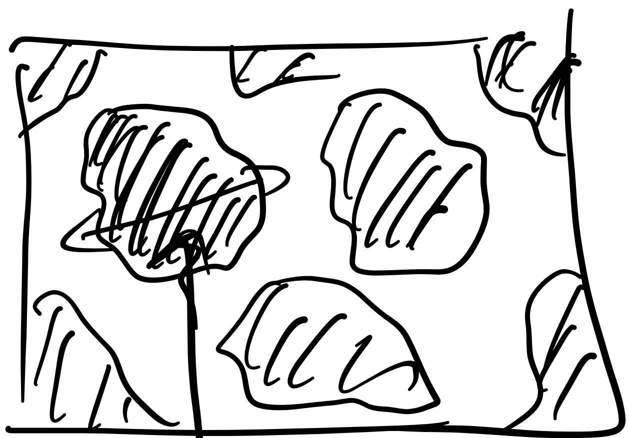
$m(T)$ es continua, pero
su primera derivada es disc.

<u>Transición de n-ésimo orden</u>

$m(T), m'(T), \ldots, m^{(n-2)}(T)$ son continuas pero $m^{(n-1)}(T)$ es discontinua

para tales transiciones ~~de~~ orden 2 ~~o~~ más lleva $\xi \xrightarrow[T \to T_c]{} \infty$

→ el sistema es invariante de escala si $T = T_c$



$\sigma = +1$ → blanco

$\sigma = -1$ → negro

ξ

para $T = T_c$, hay dominios de todos los tamaños

→ Fractal.