VI Modos de Goldstone y el teorema de Mermin-Wagner

1) Ruptura espontánea de una simetría continua

(por ejemplo, Heisenberg, x-y, pero no Ising)

superconduct.

superfluidez

magnetismo

→ En la fase ordenada aparece uno o varios grados de libertad $\varepsilon(\vec{k}) \xrightarrow[\vec{k}\to\vec{0}]{} 0$

$\varepsilon(\vec{k}) \sim c|\vec{k}|$ en $\frac{k^2}{2m}$

→ Consecuencia:

en 1 y 2-D, la fluctuaciones de ~~ELOS~~ modos de Goldstone desestabilizan el orden.

Modos de Goldstone

* en magnetismo: ondas de Spin
* cristales: phonones
* Superconductores: supercorrientes.

2) Ejemplo: el modelo xy

Con simetría SO(2) o O(1) en $\forall$ D.

$$\vec{\phi}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \phi_1(\vec{r}) \\ \phi_2(\vec{r}) \end{pmatrix} \qquad \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$$

$$S_{r.L.} = \int d\vec{r} \left[c\left[(\vec{\nabla}\phi_1)^2 + (\vec{\nabla}\phi_2)^2 \right] + \frac{a_2}{2}|\vec{\phi}|^2 + \frac{a_4}{4}|\vec{\phi}|^4 \right]$$

→ Simetría SO(2)

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow R \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

tq $\boxed{R^T R = \mathbb{1} \text{ y } \det R = 1}$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

re-escritura del mismo modelo:

$$\psi_{(\bar{r})} = \phi_1(\bar{r}) + i\,\phi_2(\bar{r})$$

$$\in \mathbb{C}$$

$$a_2 = a\,t = a\,\frac{(T-T_c)}{T_c}$$

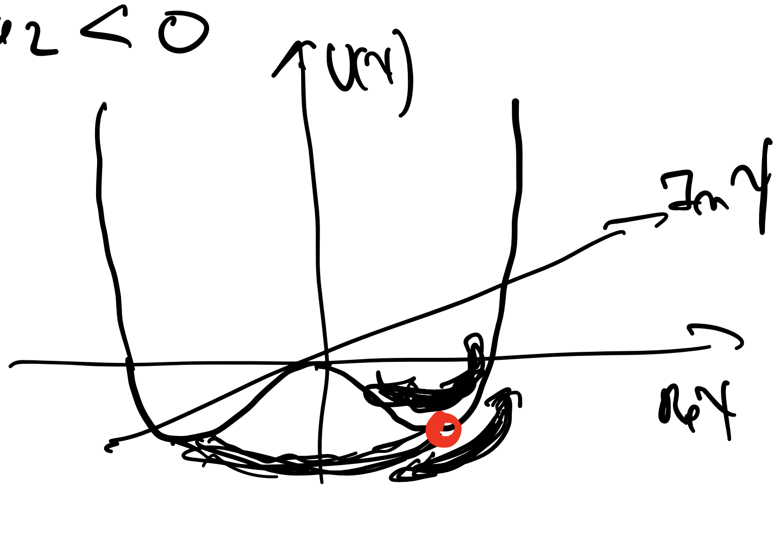
$$\boxed{S_{G.L} = \int d\bar{r} \left[|\nabla\psi|^2 + \frac{a_2}{2}|\psi|^2 + \frac{a_4}{4}|\psi|^4 \right]}$$

$U(\psi)$

$$SO(2) \equiv U(1)$$

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} \to R\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \psi \to e^{i\alpha}\psi$$

Para $a_2 < 0$



el mínimo para $U(\psi)$ es

para $\psi_{min} = \sqrt{\frac{-a_2}{a_4}}\, e^{i\theta} \quad \forall \theta \in [0, 2\pi[$

imaginemos que por ejemplo $\theta = 0$

$$\psi_{min} = \psi_0 = \sqrt{\frac{-a_2}{a_4}} \in \mathbb{R}$$

Vamos a escribir

$$\boxed{\psi(\bar{r}) = (\psi_0 + \rho(\bar{r}))\, e^{i\theta(\bar{r})}}$$

$\rho(\bar{r}) \in [-\psi_0, \infty[$

$\theta(\bar{r}) \in [0, 2\pi[$

Nos quedamos con el orden cuadrático:

$$S_{G.L.\,gaus} = \int d\vec{r}\,\Big[\overbrace{c(\vec{\nabla}\rho)^2 + m^2\rho^2 + \dots}$$
$$+ c\,\psi_0^2\,(\vec{\nabla}\theta(\vec{r}))^2 + \dots\Big]$$

Con $m^2 > 0$, $m^2 = -\frac{a_2}{c}$ $(a_2 < 0)$

las funciones de correlación de ρ: $\langle \rho(\vec{0})\,\rho(\vec{r})\rangle \sim \frac{e^{-\frac{|\vec{r}|}{\xi}}}{|\vec{r}|^{*}}$

$\xi = \frac{1}{m}$ la longitud de correlación.

$$\varepsilon(\vec{k}) \sim \vec{k}^2 + m^2 \xrightarrow[\vec{k}\to\vec{0}]{} m^2 \neq 0.$$

→ a grandes escalas, $\rho(\vec{r})$ no va intervenir

→ El único campo que es relevante

a grandes escalas es el campo

$\theta(\vec{r})$ $\quad S[\theta] = \int d\vec{r}\, \underbrace{\frac{C\,\eta_0^2}{}}_{K} (\vec{\nabla}\theta)^2$

$= \int d\vec{r}\, \underline{K}\, (\vec{\nabla}\theta)^2 \Rightarrow$ invariante de escala.

$\Rightarrow$ el modo de Goldstone.

$\varepsilon(\vec{k}) = K(\vec{k})^2 \xrightarrow[\vec{k}\to\vec{0}]{} 0$

$Z = \int \mathcal{D}\psi\, e^{-S} \longrightarrow \int \mathcal{D}\xi\, \mathcal{D}\psi\, [\,]\, e^{-S}$

$\rightarrow \int \mathcal{D}\psi\, e^{-S_{eff}}$.

$S_{eff} = \int d\vec{r}_{eff}\, K_{eff} (\vec{\nabla}\theta)^2 + \tilde{K}_{eff} (\vec{\nabla}^2\theta)^2 + \ldots$

$\sim \vec{k}^2 \qquad \sim ((\vec{k})^2)^2 + \ldots$

no hay términos como $\boxed{m^2 \rho^2}$ X

→ debido a la simetría original

$U(1)$ $\quad \psi(\vec{r}) \to e^{i\alpha}\psi(\vec{r})$

$$\boxed{\theta(\vec{r}) \to \theta(\vec{r}) + \alpha}$$

→ a grandes escalas, se puede tomar

$$\boxed{S_{eff}[\theta(\vec{r})] = \int d\vec{r}\, K(\nabla\theta)^2}$$

3) Teorema de Hermin-Wagner

$$\psi(\vec{r}) = (\psi_0 + \cancel{\delta(\vec{r})})\, e^{i\theta(\vec{r})}$$

→ lo tomamos $= 0$

porque no influye a grandes distancias

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0 e^{i\theta(\vec{r})} \qquad \text{con } S_{eff} = \int d\vec{r}\, \kappa (\vec{\nabla}\theta)^2$$

$$\langle \theta(\vec{r})\, \theta(\vec{r}') \rangle = \begin{cases} -\dfrac{|x-x'|}{2\kappa} & D=1 \\ -\dfrac{1}{\kappa\pi} \ln|\vec{r}-\vec{r}'| & D=2 \\ \dfrac{cte}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{D-2}} & D\geq 3 \end{cases}$$

Queremos calcular

$$\langle \vec{\phi}(\vec{0}) \cdot \vec{\phi}(\vec{r}) \rangle = \langle \psi^*(0)\, \psi(\vec{r}) \rangle$$

para $|\vec{r}|$ grande

en principio $\rightarrow m^2$ con $m = \| \langle \vec{\phi} \rangle \|$

$m = \psi_0$

$$\langle\ \rangle = \chi_0^2 \underline{\langle e^{-i\theta(\bar{0})} e^{i\theta(\bar{r})} \rangle}$$

propiedad del modelo gaussiano:

$$\underline{\langle \exp(\alpha Q) \rangle = \exp\left(\frac{\alpha^2}{2} \langle Q^2 \rangle\right)}$$

dado Q es lineal en $\theta(\bar{r})$

por ejemplo $Q = i(\theta(\bar{r}) - \theta(\bar{0}))$

$$\Rightarrow \langle\ \rangle = \chi_0^2\, e^{-\frac{1}{2}\langle [\theta(\bar{0}) - \theta(\bar{r})]^2 \rangle}$$

pero $\langle [\theta(\bar{0}) - \theta(\bar{r})]^2 \rangle$

$$= \Big[\underbrace{\langle \theta(\bar{0})^2 \rangle + \langle \theta(\bar{r})^2 \rangle}_{\text{son} =} - \underline{2} \langle \theta(\bar{r})\, \theta(\bar{0}) \rangle \Big]$$

para $\langle \theta(\vec{0})^2 \rangle$ diverge para $D \geq 2$

$\Rightarrow$ se regulariza

$$\langle \theta(\vec{0})^2 \rangle \to \langle \theta(\vec{0})\, \theta(a_0 \hat{e}_x) \rangle$$

$$\sim a_0^{2-D}$$

$$\Rightarrow \langle \rangle = \frac{\psi_0^2\, e^{-cte\, a_0^{2-D}}}{\tilde{\psi}_0^2 \neq 0} \qquad e^{\langle \theta(\vec{r}) - \theta(0) \rangle}$$

$$e^{\langle \theta(\vec{r}) - \theta(0) \rangle} \to \begin{cases} \sim e^{-cte|x-x'|} \to 0 & D = 1 \\ \sim \dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{\alpha}} \to 0 & D = 2 \\ \sim e^{-\frac{cte}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{D-2}}} \to 1 & D \geq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle \psi^{+}(\vec{0})\,\psi(\vec{r})\rangle \xrightarrow[|\vec{r}|\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{para } D=1,2 \\ \psi_0^2 & \text{para } D\geq 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Teorema de M. W. !