R.G. perturbativo en Teoría de campos

$$S = \int d^D r \left[\frac{t}{2}\phi^2 + \frac{K}{2}(\nabla\phi)^2 + \underline{u\phi^4} + u_6\phi^6 \dots \right]$$

Transformación de escala

$$\vec{r} = b\,\vec{r}\,' \; , \quad \vec{q} = b^{-1}\vec{q}\,'$$

$$K = K' \; , \quad \phi = b^{1-\frac{D}{2}}\phi' \; , \quad t = b^{-2}t'$$

$$\underline{u = b^{-4+D}u'} \; , \quad u_6 = b^{-6+2D}u_6'$$

$$u_8 = b^{-8+3D}u_8'$$

para u la dimensión crítica superior es $D = 4$ (i.e. si $D = 4$ u es invariante de escala) si $D < 4$ $\mu \nearrow$ con b

$D > 4$ $\mu \searrow$ con b

Trabaja con un el parametro $4 - D = \epsilon$

→ esto es sin tomar en cuenta la fluctuaciones.

$$Z \sim e^{-S} \quad \text{peso}$$

$$Z = \int D\phi \, e^{-S}$$

→ para hacer eso, pasamos a las variables de Fourier :

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \, e^{\underbrace{-\int d^D\vec{r}\left[\frac{K}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{t}{2}\phi^2\right]}_{S_0} - \mathcal{U}}$$

donde $\mathcal{U} = \underline{\underline{\mu \int d^D\vec{r}\, \phi^4}}$

def:

$$m(\vec{q}) = \int d^D\vec{r}\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \phi(\vec{r})$$

$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{d^D\vec{q}}{(2\pi)^D} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} m(\vec{q})$$

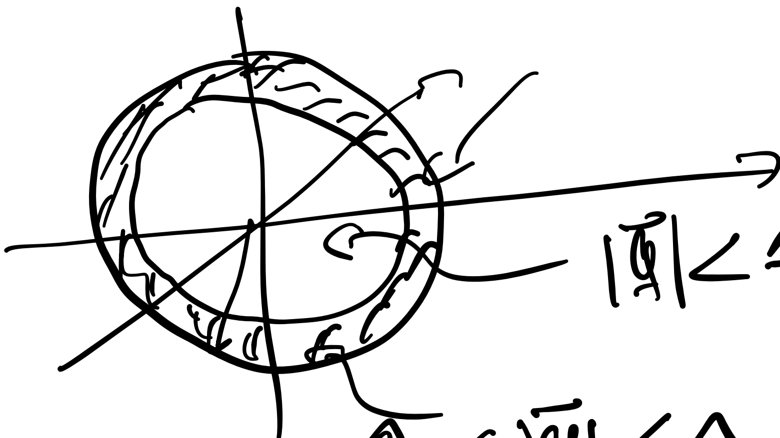
$$S_0 = \int \frac{d^D\vec{q}}{(2\pi)^D}\left(\frac{K}{2}\vec{q}^2 + \frac{t}{2}\right)|m(\vec{q})|^2$$

$$\mathcal{U} = \mu \int \frac{d\vec{q}_1\, d\vec{q}_2\, d\vec{q}_3}{(2\pi)^{3D}} m(\vec{q}_1) m(\vec{q}_2) m(\vec{q}_3)\, m(-\vec{q}_1 - \vec{q}_2 - \vec{q}_3)$$

aquí $\vec{q}$ tiene un cut-off inicial que es $\Lambda \sim \frac{1}{a_0}$ a_0 = espaciado del la red original.

La idea del R.G.

es separa



$|\vec{q}| < \frac{\Lambda}{b}$

$\frac{\Lambda}{b} < |\vec{q}| < \Lambda$

ejemplo

$$I = \int dx\, dy\, e^{f(x,y)}$$

$$= \frac{\int dx\, e^{f_{eff}(x)}}{}$$

donde $e^{f_{eff}(x)} = \frac{\int dy\, e^{f(x,y)}}{}$

$$\int \mathcal{D}[m(\vec{q})] = \int \mathcal{D}\tilde{m}(\vec{q})\, \mathcal{D}\sigma(\vec{q})$$

$$m(\vec{q}) = \begin{cases} \tilde{m}(\vec{q}) & \text{es para } 0 < |\vec{q}| < \frac{\Lambda}{b} \\ \sigma(\vec{q}) & \text{"} \quad \frac{\Lambda}{b} < |\vec{q}| < \Lambda \end{cases}$$

la idea es integrar sobre $\sigma(\vec{q})$ nada más.

si $U = 0$

$$Z = \int \mathcal{D}\tilde{m}(\vec{q})\,\mathcal{D}(\sigma(\vec{q}))\, e^{-\int_{|\vec{q}|<\Lambda/b} \frac{d^D\vec{q}}{(2\pi)^D}\left(\frac{t+Kq^2}{2}\right)|\tilde{m}(\vec{q})|^2}$$

$$\times\, e^{-\int_{\Lambda/b<|\vec{q}|<\Lambda} \frac{d^D\vec{q}}{(2\pi)^D}\left(\frac{t+Kq^2}{2}\right)|\sigma(\vec{q})|^2}$$

$$Z_\sigma = \int \mathcal{D}\{\sigma(\vec{q})\}\, e^{-\int_{\Lambda/b<q<\Lambda} \frac{d^D\vec{q}}{(2\pi)^D}\left(\frac{t+Kq^2}{2}\right)|\sigma|^2}$$

$$\delta f_\sigma^0 = \ln Z_\sigma$$

$$\langle O \rangle_\sigma = \frac{1}{Z_\sigma}\int \mathcal{D}\sigma(\vec{q})\, O\, e^{-S\{\sigma(\vec{q})\}}$$

$$Z = \int \mathcal{D}\{m(\vec{q})\}\,\underline{\mathcal{D}\{\sigma(\vec{q})\}}\, e^{-S}$$

$$= \int \mathcal{D}\{m(\vec{q})\}\, e^{-S_{eff}\{m(\vec{q})\}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{En } S_{eff}[m(\vec{q})] \\ &= \delta f_\sigma^0 + \int_{|\vec{q}|<\frac{\Lambda}{b}} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^D}\left[\frac{t+K\vec{q}^2}{2}\right]|m(\vec{q})|^2 \\ &\quad - \ln\langle e^{-U}\rangle_\sigma \end{aligned}}$$

et $\ln\langle e^{-U}\rangle_\sigma$

$$= -\langle U\rangle_\sigma + \frac{1}{2}\left(\langle U^2\rangle_\sigma - \langle U\rangle_\sigma^2\right) + \dots$$

$$\langle U[m,\sigma]\rangle_\sigma$$

$$= \mu \int \frac{d\vec{q}_1\, d\vec{q}_2\, d\vec{q}_3}{(2\pi)^{4D}} (2\pi)^D \delta(\vec{q}_1+\vec{q}_2+\vec{q}_3+\vec{q}_4)$$

$\langle m(\vec{q}_1)\; m(\vec{q}_2)\; m(\vec{q}_2)\; m(\vec{q}_c) \rangle$

puede ser $\tilde{m}(\vec{q}_<)$ ó $m(\vec{q}_>)$

dependiendo de si q_1 está entre

$\frac{\Lambda}{b}$ y Λ ó entre 0 y $\frac{\Lambda}{b}$

es fácil ver, por simetría, que sólo

los términos con un # par $\sigma(\vec{q})$

dan un resultado no-nulo.

* 0 "$\sigma(\vec{q})$" $\to$ 4 $\tilde{m}(\vec{q}) \to u\,\tilde{\phi}(\vec{r})^2$

* 4 "$\sigma(\vec{q})$" $\to$ de que cambie $\tilde{m}(\vec{q})$

  $\to$ no tiene importancia

* 2 $\sigma(\vec{q})$ y 2 $\tilde{m}(\vec{q})$ $\Rightarrow$ renormaliza

el término $\frac{t}{2}\,|m(\vec{q})|^2$

$$\Rightarrow -12\mu \int \frac{d\vec{q}_1 \cdots d\vec{q}_4}{(2\pi)^{4D}} (2\pi)^D \delta(\vec{q}_1 + \cdots + \vec{q}_4)$$

$$(2\pi)^D \frac{\delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_C)}{t + \kappa \vec{q}_1^{\,2}} \tilde{m}(\vec{q}_B) \tilde{m}(\vec{q}_4)$$

$$= -12\mu \underbrace{\int_{\frac{\Lambda}{b}}^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^D} \frac{1}{t + \kappa k^2}}_{} \times \int_{q < \frac{\Lambda}{b}} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^D} |\tilde{m}(\vec{q})|^2$$

baja esta integración de la $\sigma(\vec{q})$

$S_{eff} \simeq S$

para $t \to \hat{t} = t + 12\mu \int_{\frac{\Lambda}{b} < |\vec{k}| < \Lambda} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^D} \frac{1}{t + \kappa k^2}$

+ el cambio de escala al orden "0"

$t \to t' = b^2 t$

$$\boxed{\begin{aligned} t'_b &= b^2\left[t + 12\,u \int_{\frac{\Lambda}{b}<k<\Lambda} \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\, \frac{1}{t+Kk^2}\right] \\ u'_b &= b^{(4-D)}\, u \end{aligned}}$$

alors, $b \simeq (1+d\ell)$

$b^2 \simeq (1+2d\ell)$

$b^\alpha \simeq (1+\alpha\, d\ell)$

$\Rightarrow \quad t'_b = t + dt$

$$y \int_{\frac{\Lambda}{b}<k<\Lambda} \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\, \frac{1}{t+Kk^2} \simeq \frac{S_D}{(2\pi)^D}\, \frac{\Lambda^D}{t+K\Lambda^2}\, d\ell$$

$d^D k \simeq \Lambda^D S_D\, d\ell$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \frac{dt}{dl} &= 2t + \frac{12u \frac{S_D}{(2\pi)^D} \Lambda^D}{t + K\Lambda^2} \\ \frac{du}{dl} &= (4-D)u \end{aligned}}$$

si se toma en cuenta los términos

$$\langle u^2 \rangle_0 - \langle u \rangle_0^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dt}{dl} &= 2t + \frac{12u \frac{S_D}{(2\pi)^D} \Lambda^D}{t + K\Lambda^2} - Au^2 \\ \frac{du}{dl} &= (4-D)u - \frac{36 \frac{S_d}{(2\pi)^D} \Lambda^D}{(t + K\Lambda^2)^2} u^2 \end{aligned}}$$

punto fijo: (t^*, u^*)

$$\frac{dt^*}{dl} = 0 \qquad \frac{du^*}{\delta l} = 0$$

$$t^* = -\frac{6u^* \frac{S_D}{(2\pi)^D}\Lambda^D}{t^* + K\Lambda^2} + \frac{A}{2}u^{*2}$$

$$u^* = \frac{(t^* + K\Lambda^2)^2}{36\frac{S_D}{(2\pi)^4}\Lambda^D}\underline{(4-D)}$$

$\epsilon = 4 - D$, suponemos que $D \simeq 4$

$\epsilon << 1$

→ desarrollamos en potencias de ϵ

→ tomamos el orden 1 en ϵ

$u^* \sim \epsilon$, $t^* \sim \epsilon$

$$t^* \ll K\Lambda^2$$

$$t^* + K\Lambda^2 \sim K\Lambda^2$$

$$\frac{S_D}{(2\pi)^D} \sim \frac{S_4}{(2\pi)^4} + O(\epsilon)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} t^* = -\dfrac{K\Lambda^2}{6}\,\epsilon + O(\epsilon^2) \\[2ex] \mu^* = \dfrac{K^2}{36\,\frac{S_4}{(2\pi)^4}}\,\epsilon + O(\epsilon^2) \end{cases}}$$

$\mu = 0$

μ^*

pto fijo de Wilson

pto fijo gaussiano

$t = t^{*} + \delta t \qquad u = u^{*} + \delta u$

$$\frac{d}{d\ell}\begin{pmatrix}\delta t\\ \delta u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 - \frac{\epsilon}{3} & \cancel{*}\\ \mathcal{O}(\epsilon^2) & -\epsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta t\\ \delta u\end{pmatrix}$$

$\delta t \sim (\delta \ell)^{2-\frac{\epsilon}{3}} \quad , \quad \xi \sim (\delta \ell)^{-1}$

$\delta t \sim \xi^{-\nu} \Rightarrow \nu = \dfrac{1}{2 - \frac{\epsilon}{3}}$

$$\boxed{\Rightarrow \nu \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)}$$

<u>obs</u> si ponemos $D=3$ $(\epsilon = 1)$

$\nu_{D=3} = 0{,}58$ (trans. temp, $\nu \simeq 0{,}63$)

obs se generaliza para el modelo $O(n)$

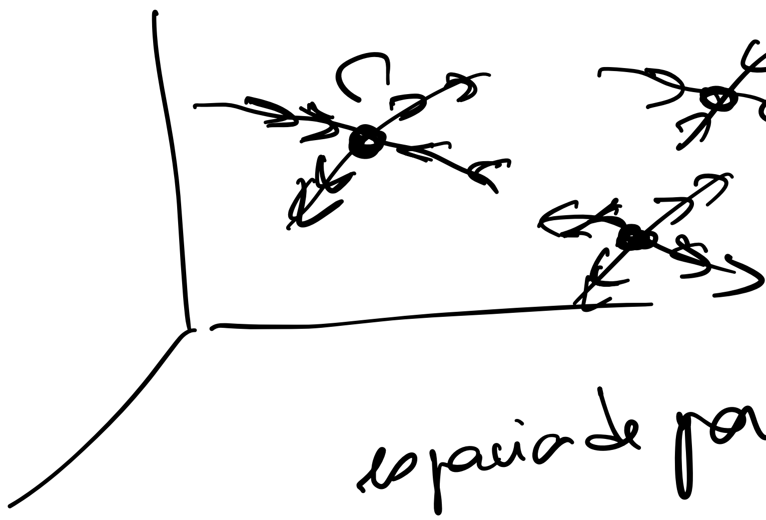
$$S = \int d\vec{r} \left[\frac{K}{2} \sum_{\mu=1}^{n} (\nabla \phi_\mu)^2 + \frac{t}{2} \sum_{\mu=1}^{n} \phi_\mu^2 + u \left(\sum_{\mu=1}^{n} \phi_\mu^2 \right)^2 \right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dt}{dl} &= \underline{2t} + \frac{4u(n+2)K\Lambda^D}{t+K\Lambda^2} + Au^2 + \ldots \\ \frac{du}{dl} &= \underline{(4-d)u} - \frac{4(n+8)K\Lambda^D}{(t+K\Lambda^2)^2}u^2 + \ldots \end{aligned}}$$

$$\begin{cases} u^* = \dfrac{K^2}{4(n+8)\frac{S_4}{(2\pi)^4}}\epsilon + O(\epsilon^2) \\ t^* = -\dfrac{(n+2)}{2(n+8)}K\Lambda^2\epsilon + O(\epsilon^2) \end{cases}$$

y $\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{n+2}{n+8}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$

3) Vecindad de un punto crítico



espacio de parámetros de S

en cada punto crítico "C" se definen campos los campos fundamentales de ese punto crítico "$\Phi_i(\vec{r})$" de dimensión de escala x_i

Como C es crítico → inv. de escala,

$$\langle \Phi_i(\vec{0})\, \Phi_i(\vec{r}) \rangle \sim \frac{1}{|\vec{r}|^{2x_i}}$$

Salimos de C poniendo

$$S = S_C + \int d^d\vec{r}\, g_i \Phi_i$$

$$[\phi_i] \sim L^{-x_i}$$

$$[g_i] \sim L^{x_i - D}$$

→ transformación de escala:

$$L \to L' \text{ tq } L = bL'$$

$$g_i \to g_i' b^{x_i - D}$$

si $x_i > D$ $g_i' \searrow$ con b

si $x_i < D$ $g_i' \nearrow$ con b

---

si $x_i > D$, una perturbación en $g_i \phi_i$ nos nos aleja de C

$\uparrow$

→ perturbación irrelevante

si $x_i < D$ → $g_i' \nearrow$ con b

→ se aleja de C. → perturbación relevante.