Módulo de Teoría: Teoría Cuántica de Campos

Nicolás BERNAL
New York University Abu Dhabi

5/03/2024

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

Programa del curso

- Temas básicos
  Relatividad especial, mecánica clásica, mecánica cuántica, teoría clásica de campos
- Cuantización del campo escalar libre
- Cuantización del campo escalar con interacciones
- Reglas de Feynman y amplitudes
- Regularización
- Renormalización
- Ruptura espontánea de la simetría

Bibliografía

- “An Introduction to Quantum Field Theory” by Peskin & Schroeder
  → errata aquí
- “Quantum Field Theory” by Ryder
- “The Quantum Theory of Fields - Foundations” by Weinberg

- “Lectures on Quantum Field Theory” by Tong
- “Quantum Field Theory” University of Amsterdam

Info relevante

- Clases:
  Martes y jueves 10am – 11am COT

- Evaluación:
  Tareas semanales :-)

- Horas de consulta:
  Miércoles 10am – 11am COT
  + Mattermost @nicolasbernal
  + zoom, mismo link

Diapositivas basadas
en las de Anamaría Font!

Introducción a la Teoría Cuántica de Campos

Teoría cuántica de campos (QFT)

- El modelo estándar de física de partículas se formula en términos de una teoría cuántica de campos (QFT)

- QFT permite calcular secciones eficaces, tazas de decaimiento… que pueden ser comparadas con las observaciones

- QFT aparece también en física de materia condensada e.g. conexión con superconductividad, efecto Hall cuántico…

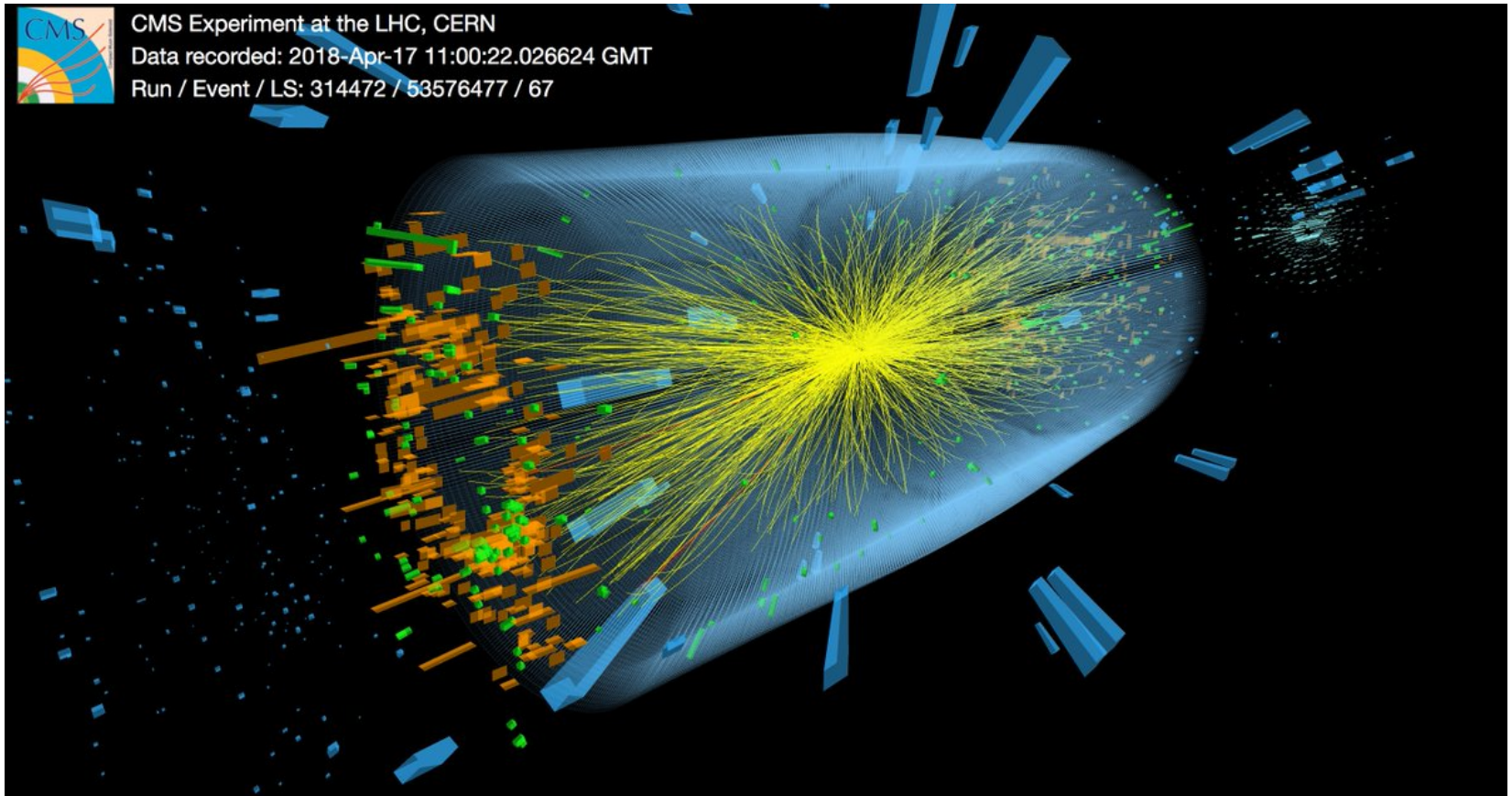
- Conceptos como la ruptura espontánea de la simetría y el grupo de renormalización (vitales en la física de partículas) fueron originados en materia condensada!

Teoría cuántica de campos?

QFT ~ mecánica cuántica + relatividad especial + campos

$$\Delta E \, \Delta t \gtrsim \hbar \qquad\qquad E = m\,c^2$$

¡El número de partículas no se conserva en procesos relativistas y cuánticos!



Campos

En QFT los objetos fundamentales son los campos
→ operadores dependientes del tiempo y la posición

Las partículas surgen al cuantizar los campos

Campo del fotón $A^\mu(t, \vec{x})$ → $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}\,, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Campo del electrón $\psi(t, \vec{x})$

Campo de Higgs $\phi(t, \vec{x})$

…

Aquí nos enfocaremos en el caso más simple: *campo escalar*

Implicaciones de QFT

- Teorema de la estadística del espín
  espín entero → bosón
  espín semientero → fermión
- Existencia de antipartículas
- Teorema CPT
- Interacciones
  creación y aniquilación de partículas
  intercambio de partículas virtuales
  e.g. $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

- Objetivo: Aplicar QFT a procesos de altas energías

Temas básicos

Unidades y dimensiones naturales

- c: velocidad de la luz en el vacío $[c] = L\ T^{-1}$ (distancia/tiempo)
- $\hbar$: constante *reducida* de Planck $[\hbar] = M\ L^2\ T^{-1}$ (masa x velocidad x distancia)

- Es *conveniente* usar unidades naturales $c = \hbar = 1$
  [energía] = [masa] = [distancia]$^{-1}$ = [tiempo]$^{-1}$

- *Todas las unidades en función de una potencia de la energía*

- Ejemplos:
  $[E] = [M] = +1$
  $[t] = [x] = -1$

Relatividad Especial

Relatividad especial

- Espacio tiempo = espacio de Minkowski
  coordenadas $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$
  notación $x = x^\mu$ $\quad x^0 = t$

$$\vec{x} = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$$

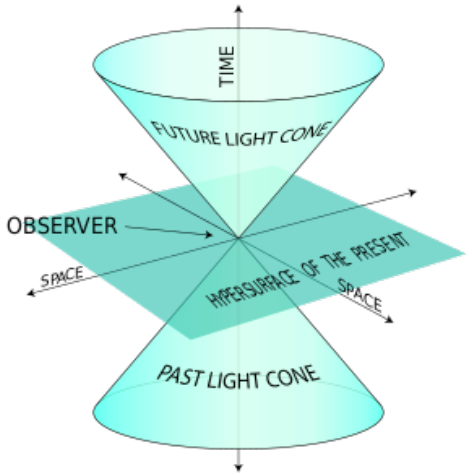
- Punto en el espacio-tiempo = evento

- Intervalo entre 2 eventos *A* y *B*

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

$$\Delta t = t_B - t_A$$
$$\Delta x = x_B - x_A$$
$$\ldots$$

$$\Delta s^2 = \begin{cases} > 0 & \text{temporal, dentro del cono de luz} \\ < 0 & \text{espacial, fuera del cono de luz} \\ 0 & \text{luz, sobre el cono de luz} \end{cases}$$



Relatividad especial

- Tensor métrico

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu}\,\Delta x^\mu\,\Delta x^\nu$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(índices repetidos se suman)

$$\eta_{\mu\nu}\,\eta^{\nu\alpha} = \delta^\alpha_\mu = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \alpha \\ 0 & \text{si } \mu \neq \alpha \end{cases}$$

i.e. $\eta_{\mu\nu}$ es la inversa de $\eta^{\mu\nu}$:

Los índices se bajan con $\eta_{\mu\nu}$ y se suben con $\eta^{\mu\nu}$:

e.g. $x_\mu = \eta_{\mu\nu}\,x^\nu$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$$

$$\Delta s^2 = \Delta x^\mu\,\Delta x_\mu$$

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \sum_{i=1}^{3} x_i\,y_i$$

(producto escalar)

Relatividad especial

Cuadrivector posición $x^\mu = (t, \vec{x})$ $x^2 = x_\mu x^\mu = t^2 - \vec{x} \cdot \vec{x}$

Cuadrivector momento $p^\mu = (E, \vec{p})$

Partícula de masa *m* $p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2$

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

Notar: $p_\mu x^\mu = E\,t - \vec{p} \cdot \vec{x}$

Relatividad especial

- Transformaciones de Lorentz $\quad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\, x^{\nu}$

  → Λ deja el producto escalar invariante

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$x'^{\mu}\, y'_{\mu} = x^{\mu}\, y_{\mu} \qquad \eta_{\mu\nu}\, \Lambda^{\mu}_{\alpha}\, \Lambda^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

$$\det \Lambda = \pm 1$$

$$\left|\Lambda^0_0\right| \geq 1$$

Ejemplos:

Boost en x^1

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\, v & 0 & 0 \\ -\gamma\, v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Rotación alrededor de z

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$p^{\mu} = (E,\, \vec{p})\,; \quad A^{\mu} = \left(A^0,\, \vec{A}\right); \quad J^{\mu} = \left(\rho,\, \vec{J}\right)$ transforman igual que x^{μ}

- Transformaciones de Poincaré $\quad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\, x^{\nu} + a^{\mu}$

Propiedades de las transformaciones de Lorentz

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\, x^{\nu}$$

$$\eta_{\mu\nu}\, \Lambda^{\mu}_{\alpha}\, \Lambda^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

$$\left(\Lambda^{-1}\right)^{\mu}_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}$$

$$\eta^{\mu\nu}\, \Lambda^{\alpha}_{\mu}\, \Lambda^{\beta}_{\nu} = \eta^{\alpha\beta}$$

$$\partial'^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}}\, \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} = \Lambda^{\mu}_{\alpha}\, \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} = \Lambda^{\mu}_{\alpha}\, \partial^{\alpha}$$

Relatividad especial

- El conjunto de transformaciones de Lorentz forma el grupo ***O*(1, 3)**
- El subconjunto con det $\Lambda = 1$ y $\Lambda^0{}_0 \geq 1$
  forma el subgrupo propio ortocrono ***SO*⁺(1, 3)**
- Teoría invariante bajo transformaciones de Lorentz
  quiere decir invariante bajo ***SO*⁺(1, 3)**
- Inversión temporal y paridad <u>*no*</u> pertenecen a $SO^+(1, 3)$

$$\mathcal{T}^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{P}^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Otras representaciones del grupo de Lorentz:
  tensor antisimétrico espinor de Dirac

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad \Psi^\alpha = \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \\ \Psi^3 \\ \Psi^4 \end{pmatrix}$$

Mecánica Clásica

Mecánica clásica

Lagrangiano *L*

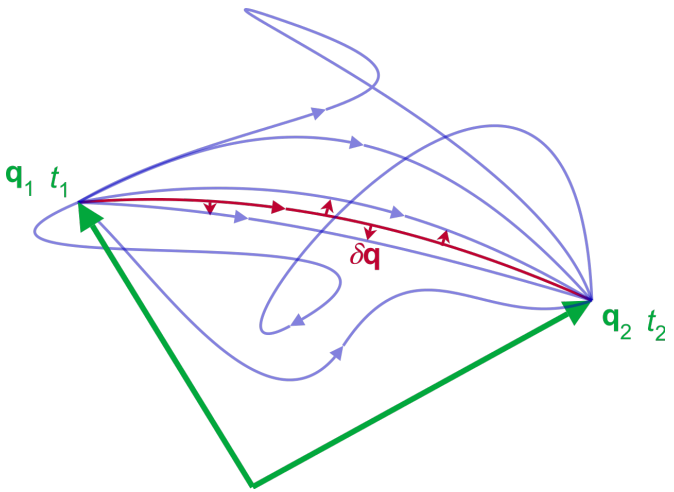
Sistema decrito por coordenadas q_a, a = 1, …, n

La dinámica depende de *L* con *L = K - V*

$$L = L(q_a, \dot{q}_a) \qquad \dot{q}_a = \frac{dq_a}{dt}$$

Se define la acción *S*

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q_a, \dot{q}_a)$$



S depende de la trayectoria (camino).

La trayectoria <u>*real*</u> es tal que *S* es estacionaria

→ $\delta S = 0$ ante $q_a \to q_a + \delta q_a$

$$\delta S = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0$$

Ecuaciones de

Euler-Lagrange

Mecánica clásica

Hamiltoniano *H*

momento $p^a = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$

$$H(q_a, p^a) = p^a \dot{q}_a - L$$

ecuaciones de movimiento

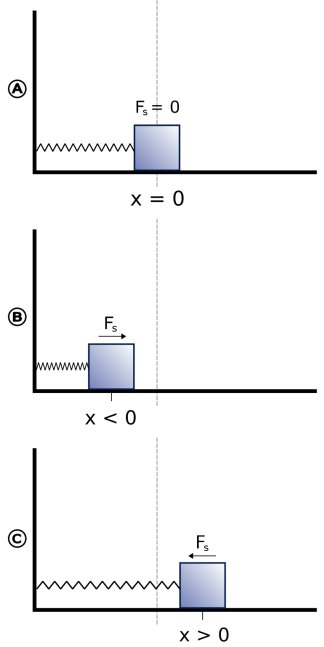
$$\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p^a} = \{q_a, H\}$$

$$\dot{p}^a = -\frac{\partial H}{\partial q^a} = \{p^a, H\}$$

corchetes de Poisson

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial g}{\partial p^a} - \frac{\partial f}{\partial p^a}\frac{\partial g}{\partial q_a}$$

$$\{q_a, q_b\} = \{p^a, p^b\} = 0\,; \qquad \{q_a, p^b\} = \delta_a^b$$



Ejemplo: Oscilador armónico

$$L = \frac{1}{2}\, m\, \dot{q}^2 - \frac{1}{2}\, k\, q^2 \qquad H = \frac{1}{2}\,\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}\, m\, \omega^2\, q^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$p \to \sqrt{m}\, p\,; \quad q \to \frac{1}{\sqrt{m}} q \qquad H = \frac{1}{2}\, p^2 + \frac{1}{2}\, \omega^2\, q^2$$

Ecuación de movimiento → $\ddot{q} + \omega^2\, q = 0$

Mecánica Cuántica

Mecánica cuántica

Postulados

- *q*, *p* → operadores
  { , } → - i [,]

$$[q_a,\, p^b] = i\,\delta_a^b\,; \qquad [q_a,\, q_b] = [p^a,\, p^b] = 0$$

- El operador Hamiltoniano *H* determina la dinámica del sistema descrito por $|\Psi(t)\rangle$
- La evolución temporal está dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\,\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = H\,|\Psi(t)\rangle$$

- Para *H* independiente de *t* $\quad |\Psi(t)\rangle = e^{-i\,H\,(t-t_0)}\,|\Psi(t_0)\rangle$

$|\Psi(t)\rangle$ se expande en una base $|\phi_n\rangle$ de autovectores de *H* $\quad H\,|\phi_n\rangle = E_n\,|\phi_n\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n\, e^{-i\,E_n\,(t-t_0)}|\phi_n\rangle$$

Mecánica cuántica

Oscilador armónico $$H = \frac{1}{2}\,p^2 + \frac{1}{2}\,\omega^2\,q^2$$

Operadores de creación y aniquilación: $a^\dagger\,,\,a$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\,\omega}}(\omega\,q + i\,p)\,; \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\,\omega}}(\omega\,q - i\,p)$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\,\omega}}(a + a^\dagger)\,; \qquad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger)$$

$$[q,\,p] = i \quad \rightarrow \quad [a,\,a^\dagger] = 1$$

$$H = \omega\left(a^\dagger\,a + \frac{1}{2}\right)$$

$$[H,\,a] = -\omega\,a\,; \quad [H,\,a^\dagger] = \omega\,a^\dagger$$

Existe un autoestado de mínima energía: vacío o estado base $|0\rangle$

$$a\,|0\rangle = 0\,; \qquad E_0 = \frac{1}{2}\,\omega$$

Autovalores y autoestados de *H*: $$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\,\omega\,; \qquad |n\rangle = \underbrace{a^\dagger \cdots a^\dagger}_{n}\,|0\rangle$$

Mecánica cuántica

- Representación de Schrödinger
  $|\Psi_S(t)\rangle$ dependiente de *t*, $\mathcal{O}_S$ independiente de *t*

$$i\,\frac{d}{dt}|\Psi_S(t)\rangle = H\,|\Psi_S(t)\rangle\,; \qquad |\Psi_S(t)\rangle = e^{-i\,H\,(t-t_0)}|\Psi_S(t_0)\rangle$$

- Representación de Heisenberg
  $|\Psi_H\rangle$ independiente de *t*, $\mathcal{O}_H(t)$ dependiente de *t*

$$|\Psi_H\rangle = e^{i\,H\,(t-t_0)}|\Psi_S(t)\rangle = |\Psi_S(t_0)\rangle$$

$$\mathcal{O}_H(t) = e^{i\,H\,(t-t_0)}\,\mathcal{O}_S\,e^{-i\,H\,(t-t_0)}\,; \qquad H = H_S = H_H$$

$$i\,\frac{d\mathcal{O}_H}{dt} = [\mathcal{O}_H,\,H]$$

$$\langle\Psi_H|\mathcal{O}_H(t)|\Psi_H\rangle = \langle\Psi_S(t)|\mathcal{O}_S|\Psi_S(t)\rangle$$

Campos Clásicos

Campos clásicos

Formulación Lagrangiana

campo $\phi(t, \vec{x})$ función de espacio y tiempo

escalar ϕ, vector A^μ, espinor ψ

$\phi(t, \vec{x})$ describe infinitos grados de libertad

dinámica determinada por Lagrangiano, función de ϕ y $\partial_\mu \phi$

$$L(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

$\mathcal{L}$: densidad Lagrangiana

Acción: $$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \, L(t) = \int d^4x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

$$[S] = 0\,; \quad [d^4x] = -4\,; \quad [\mathcal{L}] = 4$$

$\delta S = 0$ → ecuaciones de movimiento

Campos clásicos

Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi,\, \partial_\mu \phi)$$

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\,\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\,\delta(\partial_\mu \phi)\right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right)\right]\delta\phi + \int d^4x\, \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\,\delta\phi\right)\end{aligned}$$

El último término es una derivada total y se puede integrar!
Se cancela asumiendo $\delta\phi(t,\, \vec{x}) \to 0$ para $|\vec{x}| \to \infty$

$$\delta S = 0 \qquad \to \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = 0$$

Campos clásicos

Campo escalar real $\phi(t, \vec{x})$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\,m^2\,\phi^2 = \frac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\,\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\,m^2\,\phi^2 = \frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\phi\right)^2 - \frac{1}{2}\,m^2\,\phi^2$$

con *m* constante

$$[\mathcal{L}] = 4\,; \quad [\partial_\mu] = 1 \qquad \rightarrow \qquad [\phi] = 1\,; \quad [m] = 1$$

m tiene unidades de masa

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\,\phi\,; \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \partial_\mu\partial^\mu\,\phi + m^2\,\phi = 0$$

Ecuación de Klein-Gordon

Notación: Dalembert = Laplaciano en Minkowski $\quad \Box = \partial_\mu\partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$

En general: $\quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - V(\phi)$

Campos clásicos - Tarea :-)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right) = 0$$

- 2 campos escalares reales $\phi_1 \, , \, \phi_2$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \, \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \, \partial^\mu \phi_2 - \frac{1}{2} m_1^2 \, \phi_1^2 - \frac{1}{2} m_2^2 \, \phi_2^2$$

- Campo escalar complejo $\chi \, , \, \chi^*$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \chi^* \, \partial^\mu \chi - M^2 \, \chi^* \chi \qquad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi_1 + i \, \phi_2 \right)$$

- Campos escalar complejo χ y campo escalar real ϕ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi + \partial_\mu \chi^* \, \partial^\mu \chi - \frac{1}{2} m^2 \, \phi^2 - M^2 \, \chi^* \chi - g \, \chi^* \chi \, \phi$$

g: acople

→ hallar las ecuaciones de movimiento

http://laconga.redclara.net

contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for
Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.