

Módulo de Teoría: Teoría Cuántica de Campos

Nicolás BERNAL
New York University Abu Dhabi

7/03/2024



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

UAN
UNIVERSIDAD
ANTONIO NARIÑO



www.dbaccess.com
DBACCESS

frontier x
analytics

CAEN
Tools for Discovery



Formulación Lagrangiana

Campos $\phi_a(t, \vec{x}) = \phi_a(x), \quad a = 1, 2, \dots, N$

Acción S y Lagrangiano $\mathcal{L}$: $S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)$

Localidad: $\mathcal{L}$ depende de ϕ_a y $\partial_\mu \phi_a$ evaluados en el mismo punto del espacio tiempo

Ecuaciones de movimiento: $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0$

Ejemplo campo escalar real ϕ : $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$

Ec. de Klein-Gordon: $\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$



Invariancia de Lorentz

Dos observadores A y B con coordenadas x^μ y $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$
deben observar las mismas ecuaciones de movimiento (eom)
(en realidad se requiere invariancia de Poincaré $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$
como las translaciones son sencillas, nos concentramos en las transformaciones de Lorentz.)

Las transformaciones de Lorentz tienen una representación en los campos
→ e.g. campo escalar $\phi(x)$ transforma como $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$

Significado: El campo transformado en el punto transformado
= campo original en el punto antes de transformar, i.e. $\phi'(x') = \phi(x)$

Para campos con índices, la regla incluye la representación de Lorentz
e.g. campo vectorial $A^\mu(x)$: $A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x)$



Invariancia de Lorentz

¿Cómo garantizar que A y B con coordenadas x^μ y $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ observen las mismas eom?

→ Imponiendo que S sea invariante, lo cual se cumple si $\mathcal{L}$ transforma como escalar

i.e. $\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x)$, o equivalentemente $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$ [excepto por una derivada total]

Demostración:
$$S' = \int d^4x' \mathcal{L}'(x') = \int d^4x \mathcal{L}(x) = S \quad \left[\det \Lambda = 1 \rightarrow \int d^4x' = \int d^4x \right]$$

Ejemplo: Campo escalar real ϕ , $\phi'(x') = \phi(x)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad \rightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

$$\partial'_\mu \partial'^\mu \phi'(x') = \eta_{\mu\nu} \partial'^{\mu'} \partial'^{\nu'} \phi'(x') = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \partial^\alpha \partial^\beta \phi(x) = \eta_{\alpha\beta} \partial^\alpha \partial^\beta \phi(x) = \partial_\beta \partial^\beta \phi(x)$$

$$\rightarrow \partial'_\mu \partial'^\mu \phi'(x') + m^2 \phi'(x') = \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) + m^2 \phi(x) = 0$$

Similarmente, $\partial'_\mu \phi'(x') \partial'^\mu \phi'(x') = \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$

$$\left[\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} \quad (\Lambda^{-1})^\alpha_\nu = \Lambda_\nu^\alpha \quad \eta^{\mu\nu} \Lambda^\sigma_\mu \Lambda^\rho_\nu = \eta^{\sigma\rho} \quad \partial'^\mu = \Lambda^\mu_\alpha \partial^\alpha \right]$$



Simetrías y Teorema de Noether

Cada simetría continua de $\mathcal{L}$ da lugar a una corriente conservada j^μ

i.e. las eom implican $\partial_\mu j^\mu = 0$, equivalente a $\partial_0 j^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ $[j^\mu = (j^0, \vec{j})]$

Corriente j^μ conservada $\rightarrow$ carga Q conservada (independiente del tiempo)

$$Q \equiv \int_{\mathbb{R}^3} d^3x j^0 \rightarrow \frac{dQ}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \partial_0 j^0 = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \left[\text{asumiendo } \vec{j} \rightarrow 0 \text{ en } |\vec{x}| \rightarrow 0 \right]$$

Simetría continua significa parámetros continuos $\rightarrow$ transformación infinitesimal

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta \phi(x) \quad \alpha \text{ infinitesimal}$$

Es una simetría si deja las eom invariantes, i.e. si S es invariante, y a su vez si $\mathcal{L}$ es invariante

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \alpha \Delta \mathcal{L}(x) \quad \text{siendo } \Delta \mathcal{L}(x) = \partial_\mu \mathcal{F}^\mu \text{ una derivada total}$$



Simetrías y Teorema de Noether

$$\Delta\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\Delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta(\partial_\mu\phi) = \cancel{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right]\Delta\phi} + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi\right) = \partial_\mu\mathcal{F}^\mu$$

se anula por las eom

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi - \mathcal{F}^\mu\right) = 0 \quad \rightarrow \quad j^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi - \mathcal{F}^\mu$$

Para varios campos:

$$j^\mu \equiv \sum_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\Delta\phi_a - \mathcal{F}^\mu$$



Simetrías y Teorema de Noether

Ejemplo: Campo escalar complejo

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

simetría $U(1)$ global: $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$, $\phi^* \rightarrow e^{-i\alpha} \phi^*$ α constante

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi = (1 + i\alpha + \dots)\phi \quad \rightarrow \quad \Delta\phi = i\phi \quad \text{y} \quad \Delta\phi^* = -i\phi^*$$

Tarea:

→ demostrar que existe una corriente de Noether conservada asociada a la simetría $U(1)$ global

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{donde} \quad j^\mu = i(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi)$$

NB: Al acoplar con A_μ habrá un término $A_\mu j^\mu$ en $\mathcal{L}$



Simetrías y Teorema de Noether

Ejemplo: Invariancia ante translaciones y tensor energía-momento

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - \epsilon^{\mu}, \quad \phi_a(x) \rightarrow \phi_a(x + \epsilon) = \phi_a(x) + \epsilon^{\mu} \partial_{\mu} \phi_a(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

De la misma forma: $\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \epsilon^{\mu} \partial_{\mu} \mathcal{L}(x)$, notar que $\epsilon^{\nu} \partial_{\nu} \mathcal{L}(x) = \epsilon^{\nu} \partial_{\mu} (\mathcal{L} \delta_{\nu}^{\mu}) \rightarrow \mathcal{F}_{\nu}^{\mu} = \mathcal{L} \delta_{\nu}^{\mu}$

Existen 4 corrientes de Noether asociadas a las 4 translaciones en t y $\vec{x}$

$$j^{\mu} = \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_a)} \Delta \phi_a - \mathcal{F}^{\mu} \rightarrow (j^{\mu})_{\nu} = \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_a)} \partial_{\nu} \phi_a - \mathcal{L} \delta_{\nu}^{\mu} \equiv T_{\nu}^{\mu}$$

$\rightarrow T_{\nu}^{\mu}$ es el tensor energía-momento, satisface $\partial_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0$

4 cargas conservadas: $H = \int d^3x T^{00}$, $P^i = \int d^3x T^{0i}$

Tarea: Para $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$ demostrar que
$$\begin{cases} H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \\ P^i = \int d^3x \dot{\phi} \partial^i \phi \end{cases}$$



Formulación Hamiltoniana

- Momento conjugado de $\phi_a(x)$: $\pi^a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a}$
- Densidad Hamiltoniana $\mathcal{H} = \pi^a(x) \dot{\phi}_a(x) - \mathcal{L}(x)$ $\rightarrow$ depende de ϕ_a y π^a
- Hamiltoniano $H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}$
- Ecuaciones de movimiento $\dot{\phi}_a(t, \vec{x}) = \frac{\partial H}{\partial \pi^a(t, \vec{x})}$, $\dot{\pi}^a(t, \vec{x}) = -\frac{\partial H}{\partial \phi_a(t, \vec{x})}$

Ejemplo, campo escalar real ϕ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad \pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}$$

$$H = \int d^3\vec{x} \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]$$

Interludio matemático



Interludio matemático

Transformadas de Fourier

- 3D:
$$f(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}} \tilde{f}(\vec{p}), \quad \tilde{f}(\vec{p}) = \int d^3\vec{x} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}} f(\vec{x})$$
- Minkowski:
$$f(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{i x \cdot p} \tilde{f}(p), \quad \tilde{f}(p) = \int d^4x e^{-i x \cdot p} f(x)$$

[a veces se omite la tilde!]

Delta de Dirac

- 1D:
$$\int dx \delta(x) = 1, \quad \delta(x) = \int \frac{dp}{(2\pi)} e^{i x p}$$
- 3D:
$$\int d^3\vec{x} \delta^{(3)}(\vec{x}) = 1, \quad \delta^{(3)}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}$$

Cuantización del campo escalar libre





Klein-Gordon como osciladores armónicos

Mecánica cuántica $q, p, H \rightarrow$ operadores

En QFT $\phi, \pi, H \rightarrow$ operadores $\rightarrow$ ¿Espectro de H con infinitos grados de libertad?

Para el campo libre es posible desacoplar los grados de libertad!

Transformada de Fourier de $\phi(t, \vec{x})$

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}} \phi(t, \vec{p}) \quad [\phi^*(t, \vec{x}) = \phi(t, \vec{x}), \quad \phi^*(t, \vec{p}) = \phi(t, -\vec{p})]$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi(t, \vec{p})}{\partial t^2} + \underbrace{[\vec{p}^2 + m^2]}_{\omega_{\vec{p}}^2} \phi(t, \vec{p}) = 0 \quad [\text{análogo a } \ddot{q} + \omega^2 q = 0]$$

para cada valor de $\vec{p}$, $\phi(t, \vec{p})$ resuelve la eom de un oscilador armónico de frecuencia $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

Cada modo de Fourier es un oscilador *independiente*, con frecuencia $\omega_{\vec{p}}$



Cuantización canónica

Se comienza en la representación de Schödinger, con $\phi(\vec{x})$ y $\pi(\vec{x})$ independientes de t

$$[q_a, p^b] = i \delta_a^b, \quad [q_a, q_b] = [p^a, p^b] = 0 \quad \text{se generalizan a}$$

$$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad [\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 0$$

En la expansión de Fourier de $\phi(\vec{x})$ y $\pi(\vec{x})$ los modos de Fourier se tratan como osciladores de frecuencia $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, con sus propios $a_{\vec{p}}$ y $a_{\vec{p}}^\dagger$

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left[a_{\vec{p}} e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}} \right] & \left[\text{análogo a } q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a + a^\dagger) \right] \\ \pi(\vec{x}) &= -i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left[a_{\vec{p}} e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}} \right] & \left[\text{análogo a } p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (a - a^\dagger) \right] \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} + a_{-\vec{p}}^\dagger \right) e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}, \quad \pi(\vec{x}) = -i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}} - a_{-\vec{p}}^\dagger \right) e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}$$

[cambiando $p \rightarrow -p$ y usando $\omega_{-\vec{p}} = \omega_{\vec{p}}$]



Cuantización canónica

Reglas de conmutación de $\phi(\vec{x})$ y $\pi(\vec{x}) \leftrightarrow$ reglas de conmutación de $a_{\vec{p}}$ y $a_{\vec{p}}^\dagger$

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}] = [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{p}'}^\dagger] = 0 \quad \rightarrow \quad [\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 0$$

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad \rightarrow \quad [\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

En donde se usó

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} + a_{-\vec{p}}^\dagger \right) e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}, \quad \pi(\vec{y}) = -i \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}'}}{2}} \left(a_{\vec{p}'} - a_{-\vec{p}'}^\dagger \right) e^{i\vec{y}\cdot\vec{p}'}$$

$$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}'}}{\omega_{\vec{p}}}} \left([a_{-\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{p}'}] - [a_{\vec{p}}, a_{-\vec{p}'}^\dagger] \right) e^{i(\vec{x}\cdot\vec{p} + \vec{y}\cdot\vec{p}')} = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

$$[a_{\vec{p}}, a_{-\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{p}') \quad \text{y} \quad \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{x}-\vec{y})\cdot\vec{p}}$$

Tarea: comprobar todo esto!



Cuantización canónica

Hamiltoniano del campo de Klein-Gordon

$$H = \int d^3\vec{x} \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]$$

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} + a_{-\vec{p}}^\dagger \right) e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}, \quad \pi(\vec{x}) = -i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}} - a_{-\vec{p}}^\dagger \right) e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}$$

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{(2\pi)^6} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}+\vec{p}')} \left[-\frac{\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}}{4} \left(a_{\vec{p}} - a_{-\vec{p}}^\dagger \right) \left(a_{\vec{p}'} - a_{-\vec{p}'}^\dagger \right) + \frac{m^2 - \vec{p}\cdot\vec{p}'}{4\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \left(a_{\vec{p}} + a_{-\vec{p}}^\dagger \right) \left(a_{\vec{p}'} + a_{-\vec{p}'}^\dagger \right) \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \frac{1}{2} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^\dagger] \right) \end{aligned}$$

← Tarea: Comprobar esta ecuación
i.e. Eq. (2.31) de Peskin & Schroeder



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongaphysics



Latin American alliance for
Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.