

# Módulo de Teoría: Teoría Cuántica de Campos

Nicolás BERNAL  
New York University Abu Dhabi

14/3/2024

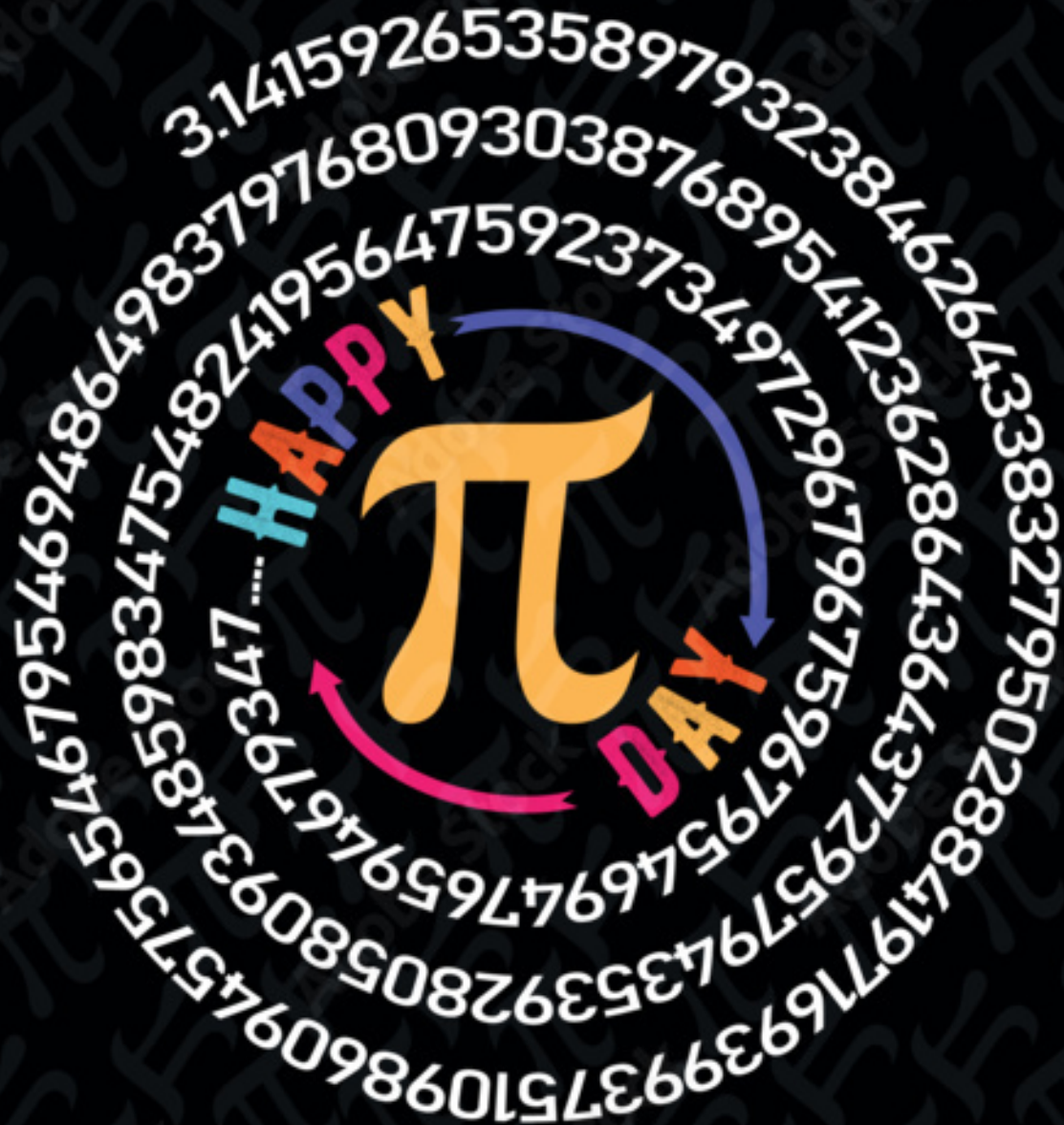


Latin American alliance for  
Capacity building in Advanced physics  
**LA-CoNGA physics**



Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea





**HAPPY**  
**PI DAY**  
**MARCH 14**



# Recapitulando...

## Campo escalar real libre cuántico:

$$\phi(x) = \phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2 E_{\vec{p}}}} \left( a_{\vec{p}} e^{-i x_\mu p^\mu} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{i x_\mu p^\mu} \right)$$

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}] = [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{p}'}^\dagger] = 0$$

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}, \quad \text{estado de vacío } |0\rangle, \quad a_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}$$

## espacio de estados de $n$ partículas

$$|0\rangle, \quad |\vec{p}\rangle = \sqrt{2 E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle, \quad |\vec{p}, \vec{k}\rangle = \sqrt{2 E_{\vec{p}}} \sqrt{2 E_{\vec{k}}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle, \quad \dots$$

$$H|0\rangle = 0, \quad H|\vec{p}\rangle = E_{\vec{p}}|\vec{p}\rangle, \quad H|\vec{p}, \vec{k}\rangle = (E_{\vec{p}} + E_{\vec{k}})|\vec{p}, \vec{k}\rangle, \quad \dots$$

$$\vec{P}|0\rangle = 0, \quad \vec{P}|\vec{p}\rangle = \vec{p}|\vec{p}\rangle, \quad \vec{P}|\vec{p}, \vec{k}\rangle = (\vec{p} + \vec{k})|\vec{p}, \vec{k}\rangle, \quad \dots$$



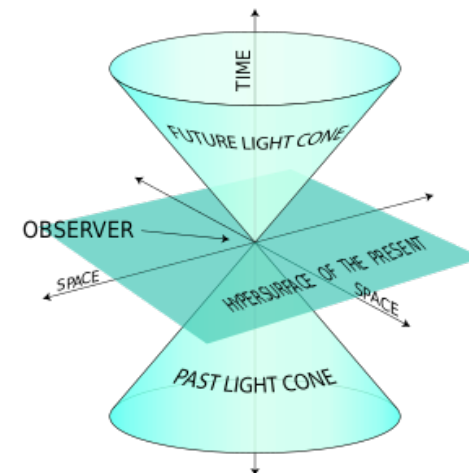
Causalidad:

Consideremos dos observadores  $A$  en  $x$  y  $B$  en  $y$ .

Una medida en  $A$  no puede afectar una medida en  $B$  si  $A$  y  $B$  están causalmente desconectados, i.e. una señal luminosa enviada desde  $A$  no puede llegar a  $B$ .

Para que la teoría sea causal, dos operadores  $O_A$  y  $O_B$  separados espacialmente deben conmutar, i.e.  $[O_A(x), O_B(y)] = 0, \quad \forall (x - y)^2 < 0$

en particular  $[\phi(x), \phi(y)] = 0, \quad \forall (x - y)^2 < 0$





Para comprobarlo calculamos el conmutador

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} \underbrace{\left[ a_{\vec{p}} e^{-ix \cdot p} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ix \cdot p}, a_{\vec{k}} e^{-iy \cdot k} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{iy \cdot k} \right]}_{\underbrace{\left[ a_{\vec{p}}, a_{\vec{k}}^\dagger \right]}_{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{k})} e^{-ix \cdot p + iy \cdot k} - \underbrace{\left[ a_{\vec{k}}, a_{\vec{p}}^\dagger \right]}_{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{p})} e^{ix \cdot p - iy \cdot k}}$$

se obtiene

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left( e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)} \right)$$

Propiedades:

→ es invariante de Lorentz [cada uno de los términos es invariante]

→ NO se anula para separación temporal,  $(x - y)^2 > 0$

e.g.  $[\phi(t, \vec{x}), \phi(t + \Delta t, \vec{x})] \sim e^{-im \Delta t} - e^{im \Delta t}$



# Causalidad

→ Sí se anula para separación espacial,  $(x - y)^2 < 0$

e.g.  $x^0 = y^0$ ,  $(x - y)^2 = -(\vec{x} - \vec{y})^2 < 0$

$$[\phi(0, \vec{x}), \phi(0, \vec{y})] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2 E_{\vec{p}}} \left( e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} - \underbrace{e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}}_{e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}} \right) = 0$$

← luego de cambio de variable  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$

Era de esperarse porque es el conmutador a igual  $t$  :-)

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}] = [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{p}'}^\dagger] = 0 \quad \rightarrow \quad [\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = 0$$

Pero  $[\phi(x), \phi(y)]$  es invariante de Lorentz y solo puede depender de  $(x - y)^2$   
por lo tanto se anula para todo  $(x - y)^2 < 0$

→ Es una teoría *causal*, con conmutadores que se anulan fuera del cono de luz



Para un campo escalar complejo  $\chi$

$$\chi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2 E_{\vec{p}}}} \left( b_{\vec{p}} e^{-ix \cdot p} + c_{\vec{p}}^\dagger e^{ix \cdot p} \right)$$

$$\chi^*(y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2 E_{\vec{k}}}} \left( b_{\vec{k}}^\dagger e^{-iy \cdot k} + c_{\vec{k}} e^{iy \cdot k} \right)$$

$$[\chi(x), \chi^*(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2 E_{\vec{p}}} \left( e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)} \right) = 0 \quad \text{para } (x-y)^2 < 0$$

Partícula propagándose de  $y$  a  $x$   
creada por  $b_{\vec{p}}^\dagger$  en  $\chi(y)^*$

Anti-partícula propagándose de  $x$  a  $y$   
creada por  $c_{\vec{p}}^\dagger$  en  $\chi(x)$



# Propagadores: campo escalar real

Propagador de una partícula que va de  $y$  a  $x$ :  $D(x - y)$

$$D(x - y) = \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2 E_{\vec{p}}} \frac{1}{2 E_{\vec{k}}} \langle 0 | a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'}^\dagger | 0 \rangle e^{-ip \cdot x + ip' \cdot y} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2 E_{\vec{p}}} e^{-ip \cdot (x - y)}$$

**Notar:**

\*  $[\phi(x), \phi(y)] = D(x - y) - D(y - x)$

\*  $D(x - y)$  no se cancela para  $(x - y)^2 < 0$

$$D(x - y) \longrightarrow e^{-m|\vec{x} - \vec{y}|} \quad \text{para} \quad (\vec{x} - \vec{y}) \rightarrow \infty$$





# Propagador de Feynman: campo escalar real

## Propagador de Feynman

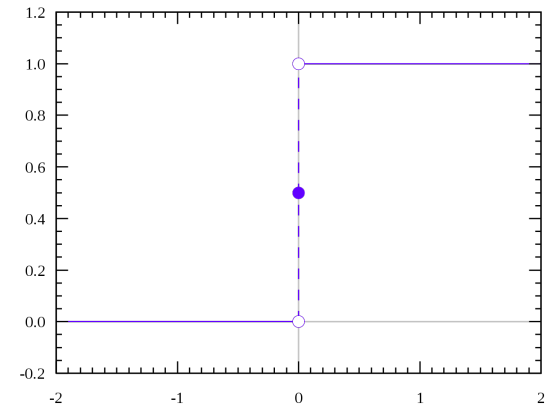
$$D_F(x - y) = \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle$$

## ordenamiento temporal $T$

$$T \{ \phi(x) \phi(y) \} = \begin{cases} \phi(x) \phi(y) & \text{si } x^0 > y^0 \\ \phi(y) \phi(x) & \text{si } y^0 > x^0 \end{cases}$$

$$T \{ \phi(x) \phi(y) \} = \phi(x) \phi(y) \Theta(x^0 - y^0) + \phi(y) \phi(x) \Theta(y^0 - x^0)$$

Función escalón de Heaviside  $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$





## Propagador de Feynman

$$D_F(x - y) = \begin{cases} \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = D(x - y) & \text{si } x^0 > y^0 \\ \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle = D(y - x) & \text{si } y^0 > x^0 \end{cases}$$

$$D_F(x - y) = D(x - y) \Theta(x^0 - y^0) + D(y - x) \Theta(y^0 - x^0)$$

$$D(x - y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2 E_{\vec{p}}} e^{-ip \cdot (x - y)}$$

$D_F(x - y)$  es invariante de Lorentz

$$D_F(x - y) = \begin{cases} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2 E_{\vec{p}}} e^{-ip \cdot (x - y)} & \text{si } x^0 > y^0 \\ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2 E_{\vec{p}}} e^{ip \cdot (x - y)} & \text{si } y^0 > x^0 \end{cases}$$



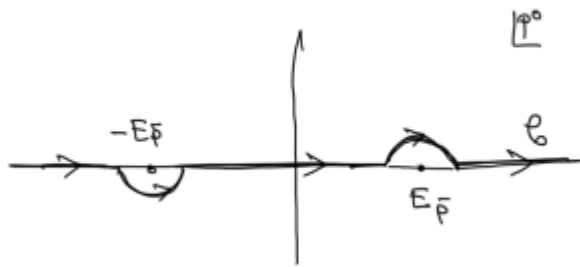
# Propagador de Feynman

Hay una forma conveniente de reescribir el propagador de Feynman

$$D_F(x - y) = \int_C \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x - y)} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \int_C \frac{dp^0}{2\pi} \underbrace{\frac{i}{(p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2}}_{i \frac{1}{p^0 - E_{\vec{p}}} \frac{1}{p^0 + E_{\vec{p}}}} e^{-ip^0(x^0 - y^0)}$$

$$\frac{1}{p^2 - m^2} = \frac{1}{(p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2} = \frac{1}{(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2} = \frac{1}{(p^0 - E_{\vec{p}})(p^0 + E_{\vec{p}})}$$

→ polos simples en  $p^0 = \pm E_{\vec{p}}$  con residuos  $-\frac{2\pi i}{2 E_{\vec{p}}}$



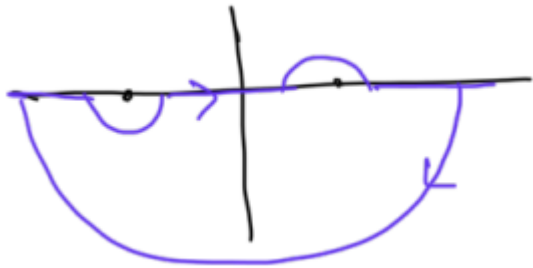
[https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_integral\\_de\\_Cauchy](https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_integral_de_Cauchy)  
[https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_de\\_los\\_residuos](https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_los_residuos)  
[https://es.wikipedia.org/wiki/Residuo\\_\(análisis\\_complejo\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Residuo_(análisis_complejo))



# Propagador de Feynman

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \int_C \frac{dp^0}{2\pi} \frac{i}{(p^0 - E_{\vec{p}})(p^0 + E_{\vec{p}})} e^{-ip^0(x^0 - y^0)}$$

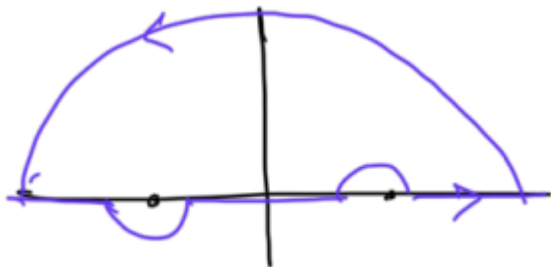
\*  $x^0 > y^0$



polo en  $p^0 = E_{\vec{p}}$  con residuo  $\frac{-2\pi i}{2 E_{\vec{p}}}$

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \frac{i}{2\pi} \frac{-2\pi i}{2 E_{\vec{p}}} e^{-iE_{\vec{p}}(x^0 - y^0)} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2 E_{\vec{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)} = D(x - y)$$

\*  $y^0 > x^0$



polo en  $p^0 = -E_{\vec{p}}$  con residuo  $\frac{2\pi i}{-2 E_{\vec{p}}}$

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \frac{i}{2\pi} \frac{2\pi i}{-2 E_{\vec{p}}} e^{iE_{\vec{p}}(x^0 - y^0)} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2 E_{\vec{p}}} e^{ip\cdot(x-y)} = D(y - x)$$



# Propagador de Feynman: prescripción $i \epsilon$

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x - y)} \quad \rightarrow \quad \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x - y)}$$

El efecto es mover los polos apropiadamente  $\epsilon > 0$  infinitesimal

$$(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon = 0 \quad \rightarrow \quad \text{polos en } p^0 = \pm(E_{\vec{p}} - i\epsilon)$$



- \*  $x^0 > y^0$  se cierra por debajo, se incluye  $E_{\vec{p}} - i\epsilon$  ( $\rightarrow E_{\vec{p}}$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ )
- \*  $y^0 > x^0$  se cierra por arriba, se incluye  $-E_{\vec{p}} + i\epsilon$  ( $\rightarrow -E_{\vec{p}}$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ )



# Propagador de Feynman y Función de Green

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x - y)}$$

De la definición  $D_F(x - y) = \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle$  se demuestra que

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) D_F(x - y) = -i \delta^{(4)}(x - y)$$

Menos formalmente...

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) D_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} (-p^2 + m^2) e^{-ip(x-y)} = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} = -i \delta^{(4)}(x - y)$$

→  $D_F(x - y)$  es la función de Green de la ecuación de Klein-Gordon

No se usó un contorno específico para esta derivación.

Existen otras funciones de Green (e.g. retardada y avanzada), útiles si se conoce la configuración inicial del campo, o para el caso de la ecuación inhomogénea.

# Cuantización del campo escalar real **con interacciones**





Hasta ahora hemos estudiado campos *libres*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad H = \int d^3x \left( \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)$$

Cuantización:  $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}$ , estados  $|0\rangle$ ,  $|\vec{p}\rangle$ ,  $|\vec{p}, \vec{k}\rangle$ , libres

Para describir procesos de choques y decaimientos de partículas es necesario incluir interacciones, i.e. términos en  $H$  que puedan acoplar estados de diferentes números de partículas.

Queremos entonces considerar  $H = H_0 + H_I$ , con  $H_0$  siendo el Hamiltoniano libre.

Estudiaremos el ejemplo particular “lambda phi 4”  $\lambda \phi^4$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

eom:  $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = -\frac{\lambda}{3} \phi^3$  ← no lineal

← tarea :-)





Notemos que  $\mathcal{L}_I$  no cambia  $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}$

Podemos proceder con la cuantización canónica en la representación de Schrödinger, imponiendo  $[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$ ,  $[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 0$

Nuevamente  $\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2 E_{\vec{p}}}} \left( a_{\vec{p}} e^{-i \vec{x} \cdot \vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{i \vec{x} \cdot \vec{p}} \right)$

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}] = [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{p}'}^\dagger] = 0$$

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$$

El problema está en pasar a la representación de Heisenberg, porque solo  $[H_0, a_{\vec{p}}] = -E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}$  y ahora  $H = H_0 + H_I$

→ ¿Qué hacer ahora? :-/



# Cuantización del campo escalar real con interacciones

- Usar teoría de perturbaciones, i.e.  $\lambda \ll 1$   
Se puede hacer porque  $\lambda$  es adimensional

Las dimensiones de masa son

$$[\mathcal{L}] = 4, \quad [\phi] = 1 \quad \rightarrow \quad [\lambda] = 1$$

- \*  $\mathcal{L} \supset \frac{\lambda_3}{3!} \phi^3$ ,  $[\lambda_3] = 1$   
acoplo adimensional  $\frac{\lambda_3}{E}$  decrece a altas energías
- \*  $\mathcal{L} \supset \frac{\lambda_5}{5!} \phi^5$ ,  $[\lambda_5] = -1$   
acoplo adimensional ( $\lambda_5 E$ ) crece a altas energías  
→ lleva a una teoría norenormalizable, o incompleta a altas energías



# Cuantización del campo escalar real con interacciones

Nos concentraremos en

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad \mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad \mathcal{H}_I = \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

$$H = H_0 + H_I$$

$$H_0 = \int d^3x \left( \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)$$

$$H_I = \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$



Eventualmente queremos obtener secciones eficaces y tasas de decaimiento.  
Antes es necesario calcular amplitudes de propagación.

En particular

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle \quad \text{recordar que} \quad \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle = D_F(x - y)$$

$|\Omega\rangle$  es el nuevo estado de vacío, en presencia de  $H_I$   
 $\phi(x)$  es el nuevo campo en la representación de Heisenberg

$$\phi(x) = e^{i H t} \phi(\vec{x}) e^{-i H t}$$

$\phi(x)$  y  $|\Omega\rangle$  dependen de  $H_I$ .

Empecemos con  $\phi(x)$



# Expansión perturbativa

La idea es usar  $\lambda \ll 1$  para obtener  $\phi(t, \vec{x})$   
en una expansión en series en  $\lambda$  (expansión perturbativa)

A orden cero  $\phi(t, \vec{x})|_{\lambda=0} = e^{i H_0 t} \phi(\vec{x}) e^{-i H_0 t} \equiv \phi_I(t, \vec{x})$

→ Notar que  $\phi_I(t, \vec{x})$  coincide con el campo de Heisenberg *libre*

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2 E_{\vec{p}}}} \left( a_{\vec{p}} e^{-i x_{\mu} p^{\mu}} + a_{\vec{p}}^{\dagger} e^{i x_{\mu} p^{\mu}} \right)$$

Queremos relacionar  $\phi_I(t, \vec{x})$  con el verdadero  $\phi(t, \vec{x})$

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{i H t} \phi(\vec{x}) e^{-i H t} = \underbrace{e^{i H t} e^{-i H_0 t}}_{U^{\dagger}(t, 0)} \underbrace{e^{i H_0 t} \phi(\vec{x}) e^{-i H_0 t}}_{\phi_I(t, \vec{x})} \underbrace{e^{i H_0 t} e^{-i H t}}_{U(t, 0)}$$



$$\phi(t, \vec{x}) = U^\dagger(t, 0) \phi_I(t, \vec{x}) U(t, 0), \quad U(t, 0) = e^{i H_0 t} e^{i H t}$$

Más generalmente consideramos

$$U(t, t') = e^{i H_0 t} e^{-i H (t-t')} e^{-i H_0 t'}, \quad U(t, t) = 1$$

→ operador de evolución en el cuadro de la interacción

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \left( i H_0 e^{i H_0 t} e^{-i H (t-t')} + e^{i H_0 t} (-i H) e^{-i H (t-t')} \right) e^{-i H_0 t'} \\ &= -i e^{i H_0 t} (H - H_0) e^{-i H (t-t')} e^{-i H_0 t'} \\ &= -i \underbrace{e^{i H_0 t} (H - H_0) e^{-i H_0 t}}_{H_I(t)} \underbrace{e^{i H_0 t} e^{-i H (t-t')} e^{-i H_0 t'}}_{U(t, t')} \end{aligned}$$

$$i \frac{\partial U(t, t')}{\partial t} = H_I(t) U(t, t')$$



# Expansión perturbativa

$$i \frac{\partial U(t, t')}{\partial t} = H_I(t) U(t, t')$$

$$U(t, t) = 1$$

La solución ingenua  $U(t, t') = \exp \left[ -i \int_{t'}^t dt'' H_I(t'') \right]$  no funciona :-)

$$U(t, t') = 1 - i \int_{t'}^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2} \int_{t'}^t dt_1 H_I(t_1) \int_{t'}^t dt_2 H_I(t_2) + \dots$$

$$i \frac{\partial U(t, t')}{\partial t} = H_I(t) - \frac{i}{2} \left[ H_I(t) \int_{t'}^t dt_2 H_I(t_2) + \int_{t'}^t dt_1 H_I(t_1) H_I(t) \right] + \dots$$

$$\neq H_I(t) U(t, t') \quad \text{porque } [H_I(t_1), H_I(t)] \neq 0$$



La solución correcta es la fórmula de Dyson

$$U(t, t') = T \left\{ \exp \left[ -i \int_{t'}^t dt'' H_I(t'') \right] \right\}$$

$$U(t, t') = 1 - i \int_{t'}^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2} T \left\{ \int_{t'}^t dt_1 H_I(t_1) \int_{t'}^t dt_2 H_I(t_2) \right\} + \dots$$

$$\begin{aligned} T \left\{ \int_{t'}^t dt_1 H_I(t_1) \int_{t'}^t dt_2 H_I(t_2) \right\} &= T \left\{ \int_{t'}^t dt_1 H_I(t_1) \left( \int_{t'}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) + \int_{t_1}^t dt_2 H_I(t_2) \right) \right\} \\ &= \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \int_{t'}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H_I(t_2) H_I(t_1) \end{aligned}$$

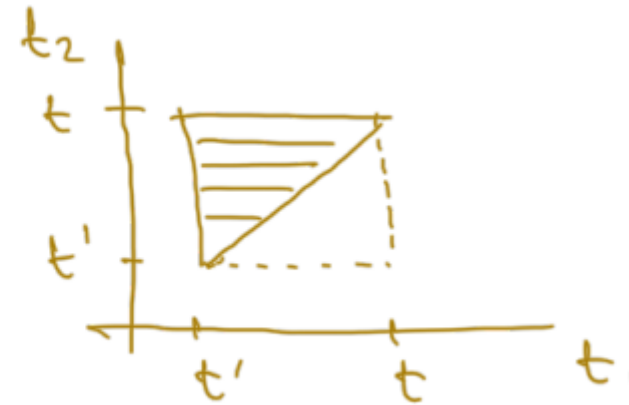
Son iguales! :-)





# Expansión perturbativa

$$\int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) = \int_{t'}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H_I(t_2) H_I(t_1)$$



Al final

$$U(t, t') = 1 - i \int_{t'}^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2} T \left\{ \int_{t'}^t dt_1 H_I(t_1) \int_{t'}^t dt_2 H_I(t_2) \right\} + \dots$$

$$U(t, t') = 1 - \underbrace{i \int_{t'}^t dt_1 H_I(t_1)}_{\text{orden } \lambda} + \underbrace{(-i)^2 \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2)}_{\text{orden } \lambda^2} + \dots$$



Verifiquemos que todo funcione

$$i \frac{\partial U(t, t')}{\partial t} = H_I(t) U(t, t')$$

Solución de Dyson  $U(t, t') = T \left\{ \exp \left[ -i \int_{t'}^t dt'' H_I(t'') \right] \right\}$

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} T \left\{ \exp \left[ -i \int_{t'}^t dt'' H_I(t'') \right] \right\} &= T \left\{ H_I(t) \exp \left[ -i \int_{t'}^t dt'' H_I(t'') \right] \right\} \\ &= H_I(t) \exp \left[ -i \int_{t'}^t dt'' H_I(t'') \right] = H_I(t) U(t, t') \end{aligned}$$



No perder de vista:

\*  $H_I(t) = e^{iH_0 t} H_I e^{-iH_0 t}$  depende de  $\phi_I(t, \vec{x}) = e^{iH_0 t} \phi_I(\vec{x}) e^{-iH_0 t}$   
 en  $\lambda \phi^4$  :

$$H_I = \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi^4(\vec{x}) \quad \rightarrow \quad H_I(t) = \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(t, \vec{x})$$

\* El resultado es general y se aplica en otros casos  
 eg. campo escalar real  $\phi$  con un campo escalar complejo  $\chi$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \chi^* \partial^\mu \chi - M^2 \chi^* \chi + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \underbrace{g \phi \chi^* \chi}_{\mathcal{L}_I}$$

$$\mathcal{H}_I = g \phi \chi^* \chi, \quad H_I = g \int d^3x \chi_I^* \chi_I \phi_I \sim (b^\dagger + c)(c + b^\dagger)(a + a^\dagger) \supset b^\dagger c^\dagger a$$

$$a^\dagger |0\rangle \langle b^\dagger c^\dagger |0\rangle$$

$H_I$  describe decaimientos (orden  $g$ ) y choques (orden  $g^2$ )



<http://laconga.redclara.net>



[contacto@laconga.redclara.net](mailto:contacto@laconga.redclara.net)



lacongaphysics



Latin American alliance for  
Capacity buildiNG in Advanced physics

**LA-CoNGA physics**



Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.