

Módulo de Teoría: Teoría Cuántica de Campos

Nicolás BERNAL
New York University Abu Dhabi

21/3/2024



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea





En la clase pasada... Función de correlación de n puntos

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle$$

$|\Omega\rangle$: estado de vacío en presencia de H_I
estado de mínima energía de $H = H_0 + H_I$

$|0\rangle$: estado de mínima energía de H_0 , $H_0|0\rangle = 0$, $a_{\vec{p}}|0\rangle = 0$, $\forall \vec{p}$

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = \lim_{t' \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \cdots \phi_I(x_n) \exp \left[-i \int_{t'}^{t'} dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left\{ \exp \left[-i \int_{t'}^{t'} dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle}$$

$$\phi_I(x) = \underbrace{\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{a_{\vec{p}} e^{-i x_\mu p^\mu}}{\sqrt{2 E_{\vec{p}}}}}_{\phi_I^+(x)} + \underbrace{\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{a_{\vec{p}}^\dagger e^{i x_\mu p^\mu}}{\sqrt{2 E_{\vec{p}}}}}_{\phi_I^-(x)}$$

$$a_{\vec{p}}|0\rangle = 0$$

$$\phi_I^+|0\rangle = 0$$



En la clase pasada... Expansión perturbativa

$$H_I = \int d^3x \mathcal{H}_I, \quad \mathcal{H}_I = \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4$$

$$\exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I \right] = \exp \left[-i \int d^4x \mathcal{H}_I \right] = \underbrace{1}_{\text{orden } 0} - i \underbrace{\int d^4z \mathcal{H}_I(z)}_{\text{orden } \lambda} + \frac{(-i)^2}{2} \underbrace{\int d^4z \mathcal{H}_I(z) \int d^4w \mathcal{H}_I(w)}_{\text{orden } \lambda^2} + \dots$$

El problema es calcular

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \cdots \phi_I(x_n) \phi_I^4(z) \phi_I^4(w) \cdots \} | 0 \rangle$$



En la clase pasada... Teorema de Wick

Hay una relación entre el ordenamiento temporal $T \{ \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n \}$ y el ordenamiento normal $: \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n :$

en donde $\phi_n \equiv \phi_I(x_n)$

$$T \{ \phi_1 \phi_2 \} = \begin{cases} \phi_1 \phi_2 & \text{si } t_1 > t_2 \\ \phi_2 \phi_1 & \text{si } t_2 > t_1 \end{cases}$$

$: \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n :$ producto de los campos con $a_{\vec{p}}$ o ϕ_i^+ a la derecha

$$\langle 0 | : \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n : | 0 \rangle = 0$$

$$\overline{\phi_1 \phi_2} \equiv D_F(x_1 - x_2)$$

Propagador de Feynman

$$\begin{aligned} D_F(x_1 - x_2) &= D_F(x_2 - x_1) = \langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \} | 0 \rangle \\ &= \Theta(x_1^0 - x_2^0) D(x_1 - x_2) + \Theta(x_2^0 - x_1^0) D(x_2 - x_1) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)} \end{aligned}$$



En la clase pasada... Teorema de Wick

Teorema de Wick $T\{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n\} = :\phi_1\phi_2\cdots\phi_n: +$: todas las contracciones posibles :

$$\begin{aligned} T\{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n\} = & :\phi_1\phi_2\cdots\phi_n: + \overbrace{(\phi_1\phi_2:\phi_3\cdots\phi_n:} + \cdots) \\ & + \overbrace{(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4:\phi_5\cdots\phi_n:} + \cdots) \\ & + \overbrace{(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\phi_5\phi_6:\phi_7\cdots\phi_n:} + \cdots) \\ & + \cdots \end{aligned}$$

→ es más fácil de lo que parece :-)

$$T\{\phi_1\} = :\phi_1: = \phi_1 \quad \rightarrow \quad \langle 0|T\{\phi_1\}|0\rangle = 0$$

$$T\{\phi_1\phi_2\} = :\phi_1\phi_2: + \overbrace{\phi_1\phi_2} = :\phi_1\phi_2: + D_F(x_1-x_2) \quad \rightarrow \quad \langle 0|T\{\phi_1\phi_2\}|0\rangle = D_F(x_1-x_2)$$

$$\begin{aligned} T\{\phi_1\phi_2\phi_3\} = & :\phi_1\phi_2\phi_3: + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3} = :\phi_1\phi_2\phi_3: + D_F(x_1-x_2)\phi_3 + D_F(x_1-x_3)\phi_2 + D_F(x_2-x_3)\phi_1 \\ \rightarrow & \quad \langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\}|0\rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle = D_F(x_1-x_2)D_F(x_3-x_4) + D_F(x_1-x_3)D_F(x_2-x_4) + D_F(x_1-x_4)D_F(x_2-x_3)$$



En la clase pasada... Diagramas de Feynman

Wick $\rightarrow$ $\langle 0|T\{\phi_1 \cdots \phi_n\}|0\rangle =$ suma de productos de propagadores D_F

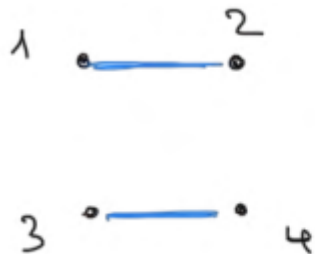
$\rightarrow$ Se puede representar gráficamente
cada punto x_i se representa por un punto
cada $D_F(x_i - x_j)$ por una línea entre x_i y x_j

Ejemplos

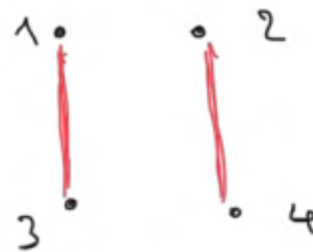
$$\langle 0|T\{\phi_1 \phi_2\}|0\rangle = D_F(x_1 - x_2)$$



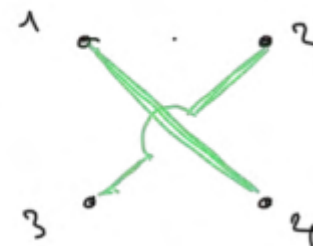
$$\langle 0|T\{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4\}|0\rangle = D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3)$$



+



+



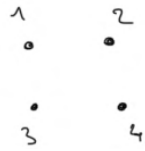


En la clase pasada... Diagramas de Feynman

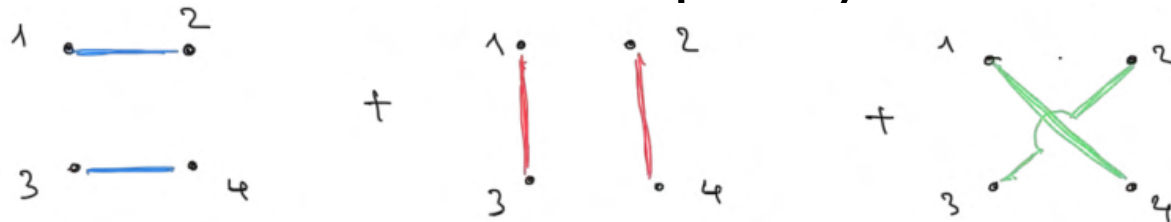
En la práctica se hace al revés: i.e. diagrama $\rightarrow$ resultado

Ejemplo: $\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle$

1. Se dibujan los puntos



2. Se ven las diferentes maneras distintas de unirlos a pares, sin dejar ninguno suelto



3. Se suman los diagramas asignando los propagadores

$$\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle = D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3)$$

$\rightarrow$ interpretación: partículas se crean en unos puntos, se propagan y luego se destruyen en otros puntos



En la clase pasada... Reglas de Feynman

Y ahora con *interacciones*, e.g.

$$\langle 0|T \left\{ \phi_I(x_1)\phi_I(x_2) \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^3z \phi_I(z)\phi_I(z)\phi_I(z)\phi_I(z) \right\} |0\rangle$$

Para cada tipo de diagrama posible:

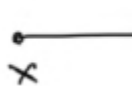
1. por cada propagador


$$= D_F(x-y)$$

2. por cada vértice


$$= (-i\lambda) \int d^4z$$

3. por cada punto externo


$$= 1$$

4. se divide por el factor de simetría

(i.e. número de formas de intercambiar componentes sin alterar el diagrama)



Reglas de Feynman

Ejemplo



$$= \frac{-i \lambda}{8} \int d^4 z D_F(x_1 - x_2) D_F(z - z) D_F(z - z)$$

Notar que el integrando *NO* depende de z $\int d^4 z \sim V T$
 Ocurre siempre que en el diagrama hay una “burbuja de vacío”
 (subdiagrama desconectado de todos los puntos externos).

$$\int d^4 z \rightarrow \infty \quad \text{corresponde a } \delta^{(4)}(0) \text{ en el espacio de momentos}$$



$$\sim (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_1 - p_2) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = \int d^4 z \sim V T$$

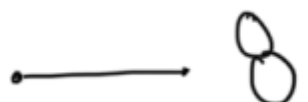
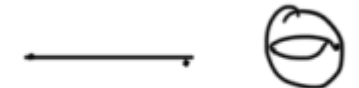


Funciones de correlación y diagramas conexos

$$\langle 0|T \left\{ \phi_I(x_1)\phi_I(x_2) \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^3z \phi_I(z)\phi_I(z)\phi_I(z)\phi_I(z) \right\} |0\rangle$$

$$= \text{diagrama de línea} + [\text{diagrama de burbuja} + \text{diagrama de bucle}] + [\text{diagrama de burbujas} + \text{diagrama de esfera} + \text{diagrama de bucle} + \dots] + \dots$$

Incluye diagramas disconexos (con subdiagramas desconectados de x_1 y x_2)

e.g.  ,  , etc

Hay burbujas de vacío proporcionales a $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = \int d^4z$

Estas burbujas también aparecen en el denominador de

$$\langle \Omega|T \{ \phi(x_1)\phi(x_2) \} |\Omega\rangle = \lim_{t' \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|T \left\{ \phi_I(x_1)\phi_I(x_2) \exp \left[-i \int_{t'}^{t'} dt H_I(t) \right] \right\} |0\rangle}{\langle 0|T \left\{ \exp \left[-i \int_{t'}^{t'} dt H_I(t) \right] \right\} |0\rangle}$$



Funciones de correlación y diagramas conexos

$$\begin{aligned} \langle 0|T \left\{ \exp \left[-i \int_{t'}^{t'} dt H_I(t) \right] \right\} |0\rangle \\ = \langle 0| \left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \phi^4(z) + \frac{1}{2} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4z \int d^4w T \{ \phi^4(z) \phi^4(w) \} + \dots \right] |0\rangle \end{aligned}$$

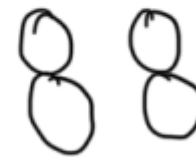
→ se calcula orden por orden usando el teorema de Wick

λ : un vértice



3

λ^2 : dos vértices



9

+



72

+



24



Funciones de correlación y diagramas conexos

$$\text{En } \frac{\langle 0|T \left\{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \exp \left[-i \int_{t'}^{t'} dt H_I(t) \right] \right\} |0\rangle}{\langle 0|T \left\{ \exp \left[-i \int_{t'}^{t'} dt H_I(t) \right] \right\} |0\rangle}$$

se cancelan las burbujas

“demostración”:

$$\frac{(\text{---} \cdot + \text{---} \circ + \text{---} \circ + \dots)}{(1 + \circ + \dots)}$$

$$\frac{1}{1+r} = 1 - r + \dots, \quad \text{si } r \ll 1$$

$$= (\text{---} \cdot + \text{---} \circ + \text{---} \circ + \dots) (1 - \circ + \dots)$$

$$= \text{---} \cdot + \text{---} \circ + \text{---} \circ - \text{---} \circ - \text{---} \circ + \dots$$



Funciones de correlación y diagramas conexos

Se demuestra:

$$\langle 0|T \left\{ \exp \left[\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4z \phi^4(z) \right] \right\} |0\rangle = \left(1 + \text{bubble} + \text{two-bubbles} + \text{sun} + \text{three-bubbles} + \dots \right)$$
$$= \exp \left(\text{bubble} + \text{two-bubbles} + \text{sun} + \dots \right)$$

$$\langle 0|T \left\{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \exp \left[\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4z \phi^4(z) \right] \right\} |0\rangle$$
$$= \left(\text{line} + \text{line-bubble} + \text{line-two-bubbles} + \text{line-sun} + \dots \right) \underbrace{\left(1 + \text{bubble} + \text{two-bubbles} + \text{sun} + \text{three-bubbles} + \dots \right)}_{\exp(\text{bubble} + \text{two-bubbles} + \text{sun} + \dots)}$$

→ exp[burbujas] se cancela en el cociente



Funciones de correlación y diagramas conexos

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = \lim_{t' \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \cdots \phi_I(x_n) \exp \left[-i \int_{t'}^{t'} dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left\{ \exp \left[-i \int_{t'}^{t'} dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle}$$

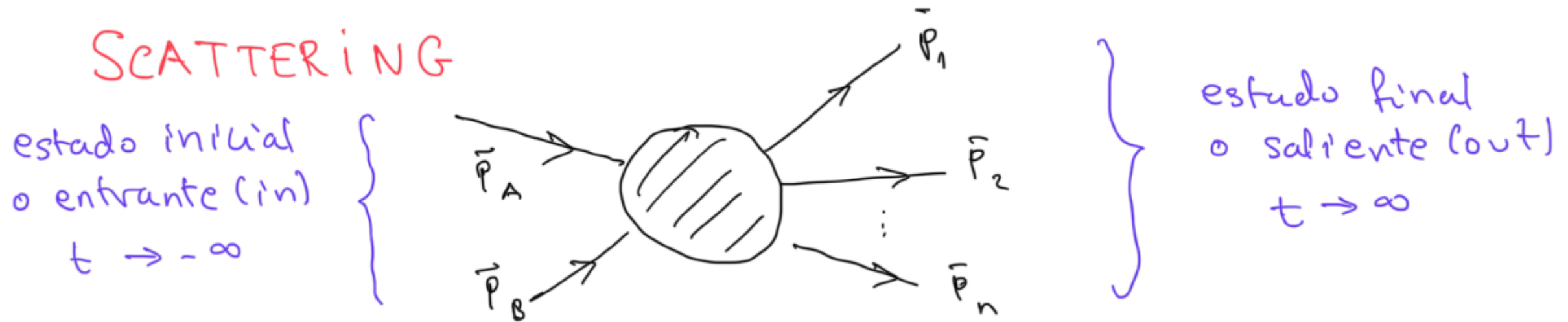
= suma de todos los diagramas *conectados*
con n puntos

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \Omega \rangle = \text{diagrama conector} + \text{diagrama con bucle} + \text{diagrama con dos bucles} + \text{diagrama con bucle y línea} + \dots$$

→ Tarea 3: comprobar y transcribir usando las reglas de Feynman :-)



Dispersiones



Estado inicial $|\vec{p}_A, \vec{p}_B\rangle_{\text{in}}$: partículas de momento definido, muy separadas, chocan (interactúan), salen partículas de momento $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots$, observadas mucho después, lejos del punto de interacción $\rightarrow$ estado final $|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots\rangle_{\text{out}}$

La amplitud de probabilidad de transición es

$${}_{\text{out}}\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_{\text{in}} \equiv \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n | S | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle$$

- * $|\vec{p}_A \vec{p}_B\rangle, |\vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n\rangle$ definidos en un tiempo de referencia común
- * Matriz S



Dispersiones

Si no hay interacciones $\mathcal{S} = 1$

la parte no trivial viene de la matriz $\mathcal{T}$ definida por

$$\mathcal{S} = 1 + i\mathcal{T}$$

$\mathcal{S}$, y por lo tanto $\mathcal{T}$, debe incluir $\delta^{(4)}\left(p_A + p_B - \sum_n p_n\right)$

por conservación de la energía y el momento

Se define la matriz $\mathcal{M}$

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n | i\mathcal{M} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_A + p_B - \sum_n p_n\right) i\mathcal{M}\left(p_A, p_B \rightarrow \sum_n p_n\right)$$

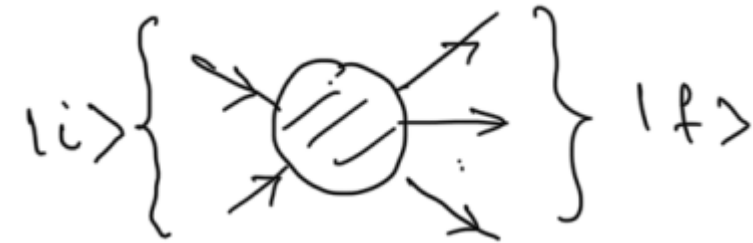
→ $\mathcal{M}$ se calcula usando los diagramas de Feynman



Simplificando la notación

$$S = 1 + i\mathcal{T}$$

$$\mathcal{S}_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) \mathcal{M}_{fi}$$



1. Rata de transición para ir de $|i\rangle$ a $|f\rangle$

$$R_{fi} = \frac{1}{T} \frac{|\mathcal{S}_{fi}|^2}{\langle f|f\rangle \langle i|i\rangle}$$

← probabilidad por unidad de tiempo
 T : tiempo total del experimento

La interacción viene de $\mathcal{M}_{fi}$

La norma cuadrada incluye:

$$\begin{aligned} \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) \right]^2 &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) \times V T \end{aligned}$$

V : volumen total del experimento



Al final los factores de V y T se cancelan.

También aparecen en $\langle i|i \rangle$ y $\langle f|f \rangle$

$$\langle \vec{p} | \vec{p}' \rangle = (2\pi)^3 2 E_{\vec{p}} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$\langle \vec{p} | \vec{p} \rangle = (2\pi)^3 2 E_{\vec{p}} \delta^{(3)}(0) = 2 E_{\vec{p}} V$$

$$\langle i|i \rangle = (2 E_A V) (2 E_B V), \quad \langle f|f \rangle = (2 E_1 V) (2 E_2 V) \cdots (2 E_n V)$$

2. Sección eficaz σ

$$\sigma = \frac{\text{rata de transición}}{\text{flujo incidente}} \times \text{área efectiva de choque}$$

flujo incidente = # de partículas incidentes por unidad de área y unidad de tiempo

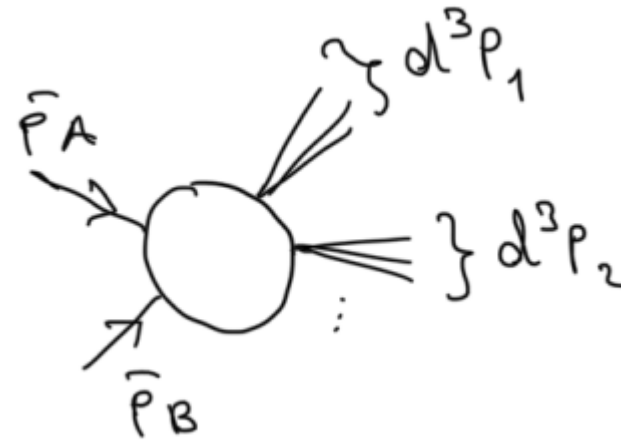
$$= \frac{|\vec{v}_A - \vec{v}_B|}{V}$$



3. Sección eficaz diferencial

$$d\sigma = \frac{R_{fi} V}{|\vec{v}_A - \vec{v}_B|} d\Pi$$

$$d\Pi = \left(\frac{V}{(2\pi)^3} d^3p_1 \right) \left(\frac{V}{(2\pi)^3} d^3p_2 \right) \cdots \left(\frac{V}{(2\pi)^3} d^3p_n \right)$$



sustituyendo

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2E_A)(2E_B)|\vec{v}_A - \vec{v}_B|} d\Pi_{\text{LIPS}}$$

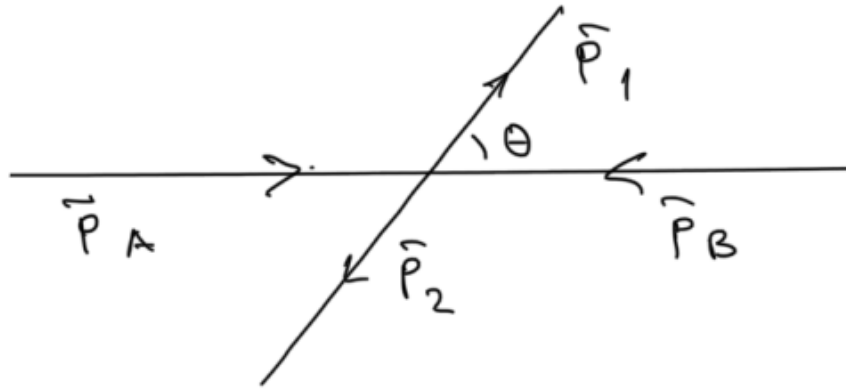
LIPS = Lorentz invariant phase space

$$d\Pi_{\text{LIPS}} = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_n p_n \right) \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3(2E_1)} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3(2E_2)} \cdots \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3(2E_n)}$$



M y sección eficaz

$A + B \rightarrow 1 + 2$ en el marco del centro de masa



$$\vec{p}_A = -\vec{p}_B$$

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

$$E_A + E_B = E_1 + E_2 \equiv E_{\text{CM}}$$

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{CM}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} \frac{|\vec{p}_1|}{|\vec{p}_A|} \Theta(E_{\text{CM}} - m_1 - m_2)$$

Si $m_1 = m_2 = m_A = m_B = m$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{CM}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} \Theta(E_{\text{CM}} - 2m)$$

→ M. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*



Próximamente...

Calcular $\mathcal{M}$ usando los diagramas de Feynman!

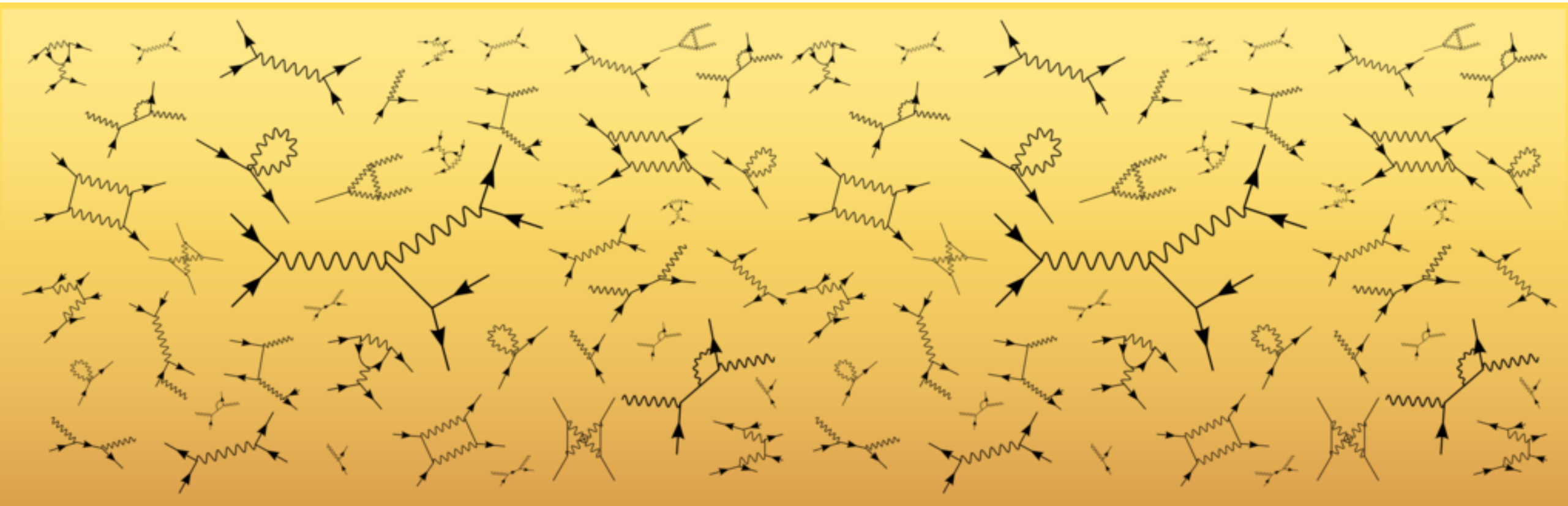


Imagen tomada de <https://steemit.com/physics/@sinbad989/a-guide-to-feynman-diagrams-in-the-many-body-problem-feynman-diagrams-or-how-to-solve-the-many-body-problems-by-means-of-picture>



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongaphysics



Latin American alliance for
Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.