

Módulo de Teoría: Teoría Cuántica de Campos

Nicolás BERNAL
New York University Abu Dhabi

2/4/2024



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea





En la clase pasada... Funciones de correlación de n puntos

Función de correlación de n puntos

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = \lim_{t' \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \cdots \phi_I(x_n) \exp \left[-i \int_{-t'}^{t'} dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left\{ \exp \left[-i \int_{-t'}^{t'} dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle}$$

= suma de todos los diagramas **conectados** con n puntos externos

→ sin burbujas de vacío



En la clase pasada... Funciones de correlación de n puntos

Ejemplo: $\lambda \phi^4$, $\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4$

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \underbrace{\text{---}}_{\lambda^0} + \underbrace{\text{---} \circ}_{\lambda} + \left[\underbrace{\text{---} \circ \circ}_{\lambda^2} + \frac{\text{---} \circ \circ}{\lambda^2} + \underbrace{\text{---} \bigcirc}_{\lambda^2} \right] + \dots$$

$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{---} \text{---} \quad \leftarrow 3 \text{ similares}$$

$$+ \text{---} \times + \text{---} \text{---} \quad \leftarrow 6 \text{ similares}$$

$$+ \text{---} \times + \text{---} \times + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---}$$

+ ...

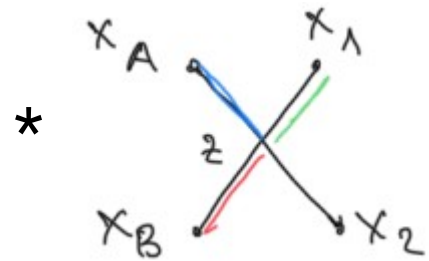


En la clase pasada... Feynman en el espacio de las posiciones

Reglas de Feynman en el espacio de las posiciones

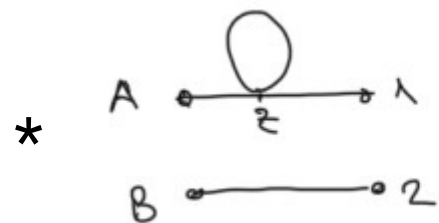
Para calcular $G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a un cierto orden en la expansión perturbativa se dibujan todos los diagrama *conectados* con n puntos externos y número de vértices igual al orden. Y se suman.

Ej: $\lambda \phi^4$, $G^{(4)}(x_A, x_B, x_1, x_2)$, orden λ



$$G_1^{(4)} = -i \lambda \int d^4 z D_F(x_A - z) D_F(x_B - z) D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z)$$

$$G_1^{(4)} = -i \lambda \int d^4 z \int \frac{d^4 k_A}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ik_A(x_A - z)}}{k_A^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k_B}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ik_B(x_B - z)}}{k_B^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ik_1(x_1 - z)}}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ik_2(x_2 - z)}}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon}$$



+ similares

← tarea :-)



En la clase pasada... Feynman en el espacio de los momentos

En $G_1^{(4)}$ aparece $-i \lambda \int d^4 z e^{i z (k_A + k_B + k_1 + k_2)} = -i \lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_A + k_B + k_1 + k_2)$

$$G_1^{(4)} = -i \lambda \int \frac{d^4 k_A}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-i k_A x_A}}{k_A^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k_B}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-i k_B x_B}}{k_B^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-i k_1 x_1}}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-i k_2 x_2}}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \\ \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_A + k_B + k_1 + k_2)$$

Reglas de Feynman en el espacio de los momentos

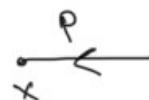
* Por cada propagador

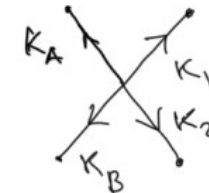
$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

* Por cada vértice

$$-i \lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_A + k_B + k_1 + k_2)$$

* Por cada punto externo

$$e^{-i p x}$$




* Se integra sobre todos los momentos $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$

* Se divide por el factor de simetría

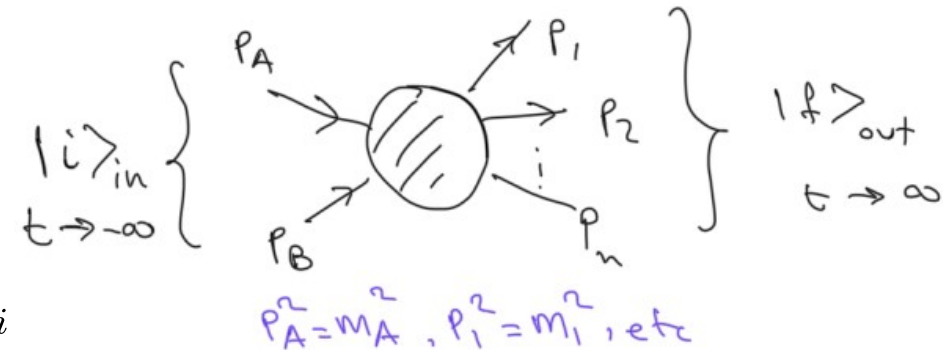


En la clase pasada... Dispersiones $A+B \rightarrow 1+2+ \dots + n$

Matriz S

$$S_{fi} = \text{out} \langle f|i \rangle_{\text{in}}$$

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i \mathcal{T}_{fi}, \quad \mathcal{T}_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_n p_n \right) \mathcal{M}_{fi}$$



Sección eficaz diferencial

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2E_A)(2E_B)|\vec{v}_A - \vec{v}_B|} d\Pi_{\text{LIPS}}$$

$$d\Pi_{\text{LIPS}} = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_n p_n \right) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 (2E_1)} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 (2E_2)} \dots \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 (2E_n)}$$

LIPS = Lorentz invariant phase space

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{CM}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} \quad A + B \rightarrow 1 + 2$$

Diagramas de Feynman y amplitudes de scattering





Fórmula de reducción de Lehmann-Symanzik-Zimmerman (LSZ)

$i\mathcal{T}_{fi}$ se obtiene a partir de

$$G^{(2+n)}(\underbrace{x_A, x_B}_i, \underbrace{x_1, \dots, x_n}_f) = \langle \Omega | T \{ \phi(x_A) \phi(x_B) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle$$

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n | i\mathcal{T} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle =$$

$$= \left[i \int d^4 x_1 e^{i x_1 p_1} (\square_1 + m^2) \right] \cdots \left[i \int d^4 x_n e^{i x_n p_n} (\square_n + m^2) \right] \\ \times \left[-i \int d^4 x_A e^{-i x_A p_A} (\square_A + m^2) \right] \left[-i \int d^4 x_B e^{-i x_B p_B} (\square_B + m^2) \right] G^{(2+n)}(x_A, x_B, x_1, \dots, x_n)$$

Demo: ver Schwartz, sección 6.2

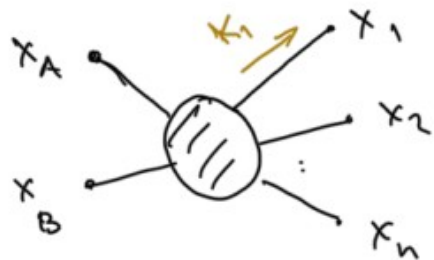


Fórmula de reducción de Lehmann-Symanzik-Zimmerman (LSZ)

$$* \quad \square_1 + m^2 = \frac{\partial}{\partial x_1^\mu} \frac{\partial}{\partial x_{1\mu}} + m^2 = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - \vec{\nabla}_1^2 + m^2$$

Si no hay interacciones, $(\square + m^2) \phi = 0 \rightarrow$ eom!

* Sabemos calcular los G^n



incluye $\int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i x_1 k_1}$

el efecto de $i \int d^4 x_1 e^{i x_1 p_1} (\square_1 + m^2)$ sobre $G^{(2+n)}(x_A, x_B, x_1, \dots, x_n)$ es

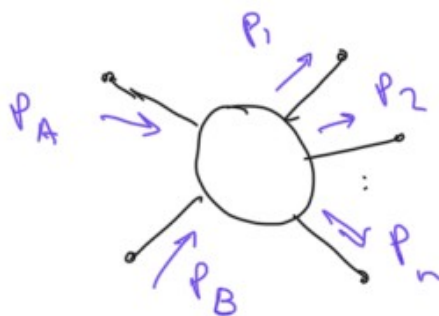
$$\int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \underbrace{\int d^4 x_1 e^{i x_1 p_1} e^{-i x_1 k_1}}_{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - k_1)} (k_1^2 - m^2) = \frac{1}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} (p_1^2 - m^2) = 1$$

se cancelan!



Fórmula de reducción de Lehmann-Symanzik-Zimmerman (LSZ)

* Patas externas \rightarrow partículas “on-shell”



$$p_1^2 = m^2$$
$$p_A^2 = m^2$$

etc

No hay propagadores en las patas externas

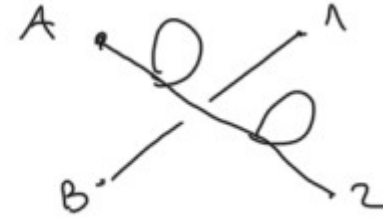
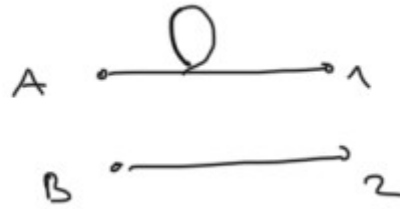
* Los diagramas que contribuyen a $G^{(2+n)}(x_A, x_B, x_1, \dots, x_n)$ no tienen burbujas de vacío

* Solo diagramas **completamente conectados** contribuyen a $i\mathcal{T}_{fi}$
 \rightarrow todas las patas externas se conectan entre si a través del diagrama



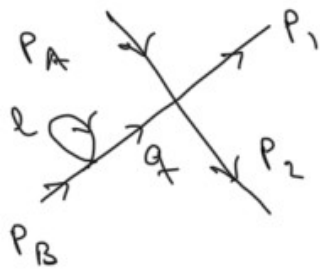
Fórmula de reducción de Lehmann-Symanzik-Zimmerman (LSZ)

Ejemplos de diagramas *desconectados*



estos diagramas describen procesos triviales con $|i\rangle = |f\rangle$

* Diagramas con bucles conectados a solo una pata externa se “amputan”
Ej: (ya con las patas externas *on-shell*, sin propagadores)



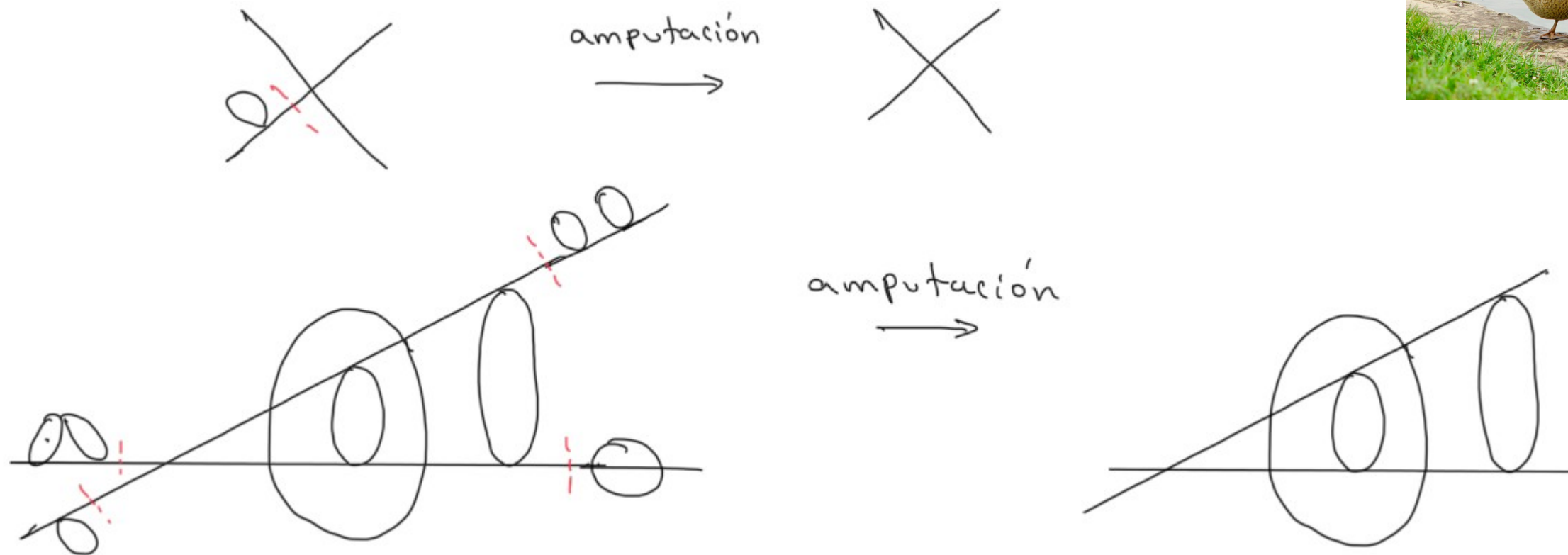
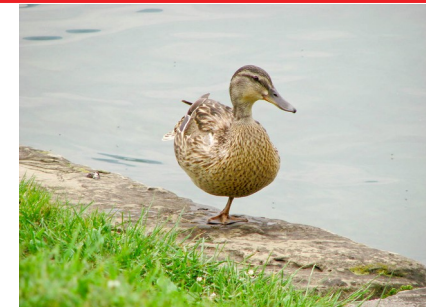
$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i}{l^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \left(-i\lambda\delta^{(4)}(p_B - q) \right) \left(-i\lambda\delta^{(4)}(p_A + q - p_1 - p_2) \right)$$

integración en q usando $\delta^{(4)}(p_B - q) \rightarrow \frac{1}{q^2 - m^2} \Big|_{q=p_B} = \frac{1}{p_B^2 - m^2} = \frac{1}{0}$



Fórmula de reducción de Lehmann-Symanzik-Zimmerman (LSZ)

Para evitar este problema se amputa las patas



los bucles en patas externas no tienen que ver con la dispersión

→ Solo afectan la *renormalización* de m y ϕ



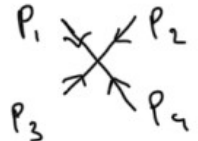
Fórmula de reducción de Lehmann-Symanzik-Zimmerman (LSZ)

En conclusión:

$$i \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum p_f \right)$$

= suma de *todos* los diagramas de Feynman completamente *conectados* y *amputados*

1. Por cada propagador interno  = $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

2. Por cada vértice  = $(-i\lambda)$, se impone conservación del 4-momento

3. Por cada pata externa  = 1

4. Se integra sobre el momento (indeterminado!) de cada bucle $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$

5. Se divide por el factor de simetría

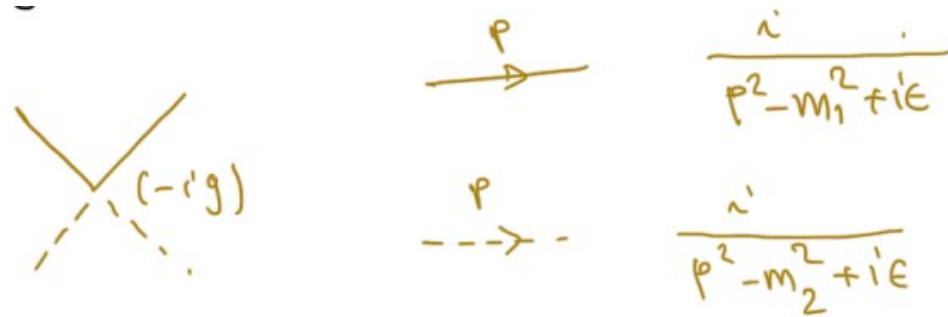


Fórmula de reducción de Lehmann-Symanzik-Zimmerman (LSZ)

Se generaliza a otras teorías, adaptando los vértices y los propagadores.

Por ejemplo:

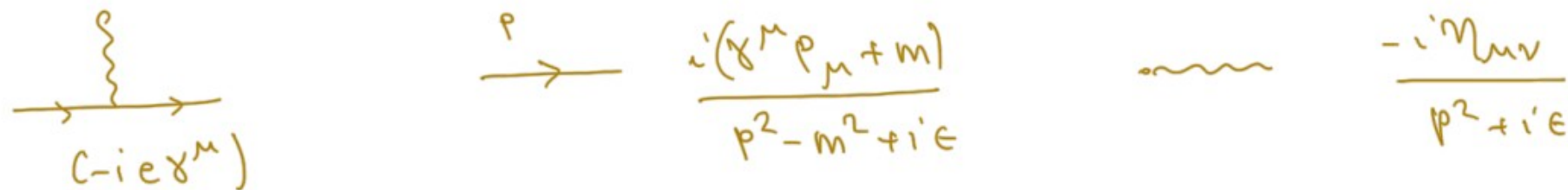
1. 2 campos escalares reales ϕ_1 y ϕ_2 con $\mathcal{L}_I = -\frac{g}{4} \phi_1^2 \phi_2^2$



2. 1 campo escalar real ϕ con $\mathcal{L}_I = -\frac{g}{3!} \phi^3$



3. QED $\mathcal{L}_I = -e \bar{\psi} \partial^\mu \psi A_\mu$





Amplitud de dispersión $A+B \rightarrow 1+2$ en $\lambda \phi^4$

Posibles diagramas:

$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$

The diagrammatic expansion shows the following terms:

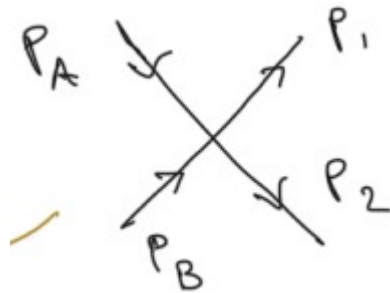
- Two parallel horizontal lines.
- A circle with an X inside, plus a tadpole on top of a horizontal line.
- A tadpole on top of a horizontal line.
- A tadpole on top of a horizontal line with a loop on top.
- A tadpole on top of a horizontal line with a loop on the side.
- A tadpole on top of a horizontal line with two loops on top.
- A tadpole on top of a horizontal line with a loop on top and a tadpole on the side.
- A tadpole on top of a horizontal line with two loops on top.
- Ellipses indicating more diagrams.



Amplitud de dispersión $A+B \rightarrow 1+2$ en $\lambda \phi^4$

* Orden λ^1 :

$$i \mathcal{M}_1 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) =$$



$$= -i \lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2)$$

$$\rightarrow \mathcal{M}_1 = -\lambda$$

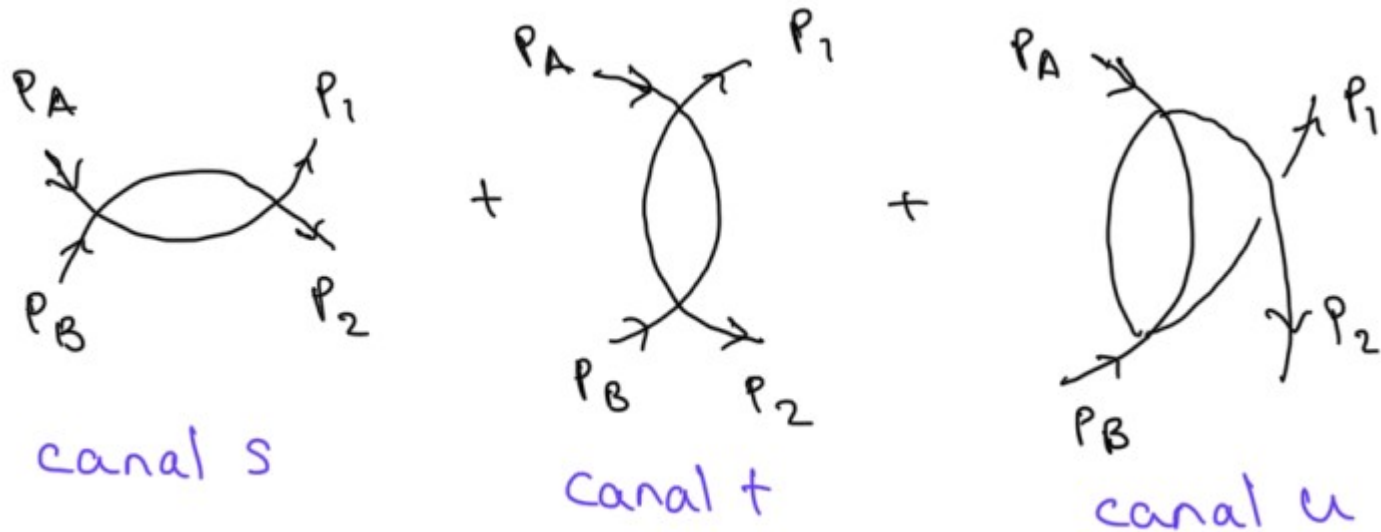
$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{CM}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2}$$



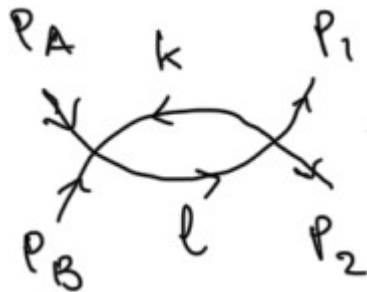
Amplitud de dispersión $A+B \rightarrow 1+2$ en $\lambda \phi^4$

* Orden λ^2 :

$$i \mathcal{M}_2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) =$$



Canal s:



$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{l^2 - m^2 + i\epsilon} \left[-i\lambda(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B + k - l) \right] \left[-i\lambda(2\pi)^4 \delta^{(4)}(l - k - p_1 - p_2) \right]$$

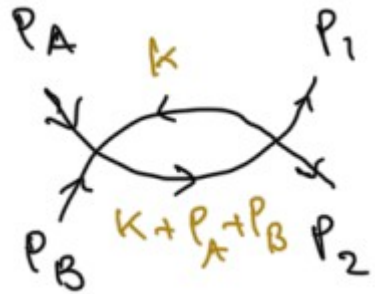
$$= \left[\frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_A + p_B + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \underbrace{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2)}_{\text{consevación del momento total}}$$

Queda una sola integral en k . Un solo bucle \rightarrow 1 solo momento libre



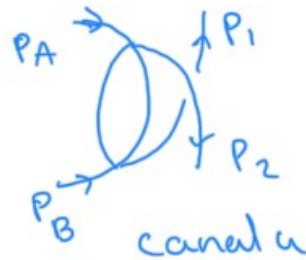
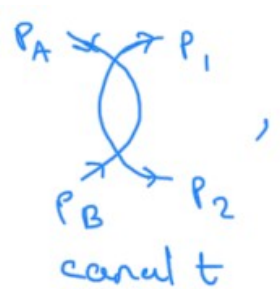
Amplitud de dispersión $A+B \rightarrow 1+2$ en $\lambda \phi^4$

En la práctica:



$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_A + p_B + k)^2 - m^2 + i\epsilon} = i \mathcal{M}_2(s)$$

Tarea: comprobar que
Hallar $\mathcal{M}_2(t)$ y $\mathcal{M}_2(u)$



son similares

s, t, u : variables de Mandelstam

$$s = (p_A + p_B)^2 = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_A - p_1)^2 = (p_2 - p_B)^2, \quad u = (p_A - p_2)^2 = (p_1 - p_B)^2$$

Tarea 4: $s + t + u = 4m^2 = \sum_{i=1}^4 m_i^2$



Amplitud de dispersión $A+B \rightarrow 1+2$ en $\lambda \phi^4$

En conclusión:

$$i \mathcal{M}_2 = i \mathcal{M}_2(s) + i \mathcal{M}_2(t) + i \mathcal{M}_2(u)$$

$$i \mathcal{M}_2(s) = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad p \equiv p_A + p_B$$

La integral es divergente! :-)

Para $k^2 \gg m^2, p^2$, $\mathcal{M} \sim \int \frac{d^4k}{k^4}$ tiene divergencia logarítmica

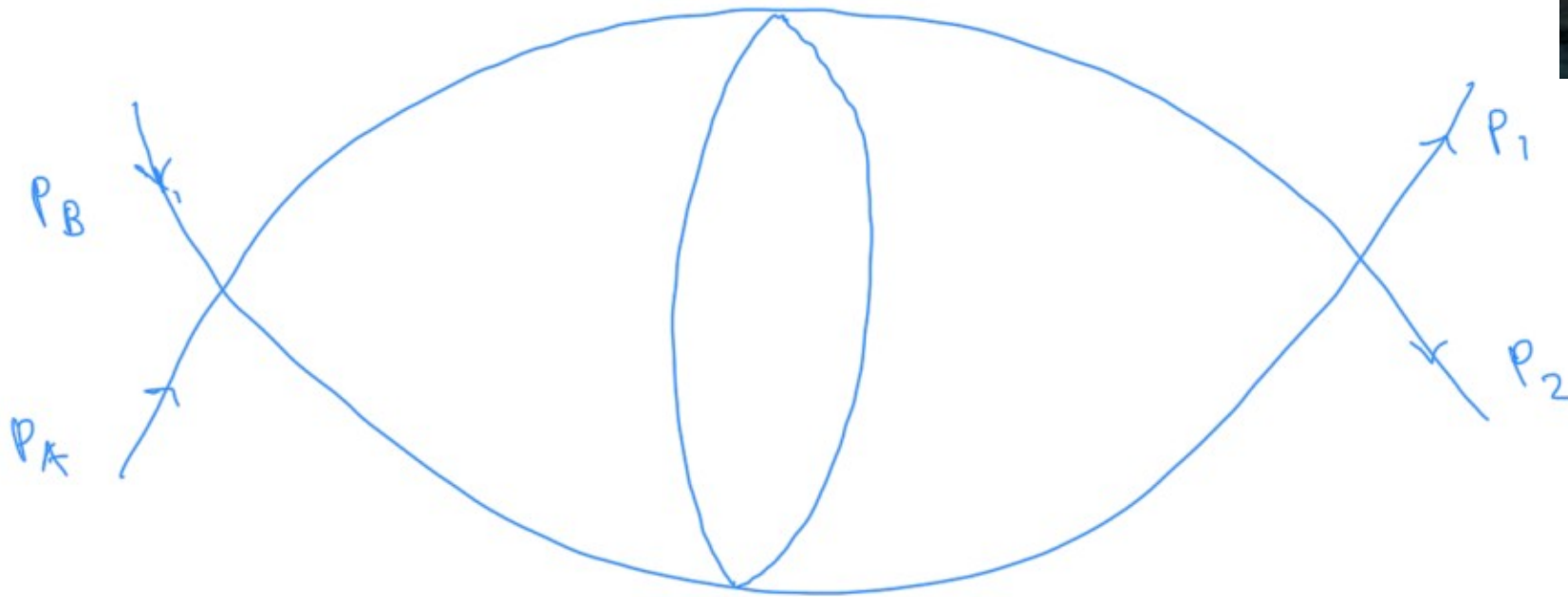
Qué hacer? \rightarrow respuesta en el futuro próximo...



Amplitud de dispersión $A+B \rightarrow 1+2$ en $\lambda \phi^4$

Mientras tanto...

Tarea: Determinar la contribución a \mathcal{M}_4 de



- * Cuántos bucles? $\rightarrow 3$
- * Cuántas integrales? $\rightarrow 3$
- * Cuántos propagadores? $\rightarrow 6$
- * Tipo de divergencia? \rightarrow logarítmica



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongaphysics



Latin American alliance for
Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.