

# Módulo de Teoría: Teoría Cuántica de Campos

Nicolás BERNAL  
New York University Abu Dhabi

4/4/2024



Latin American alliance for  
Capacity building in Advanced physics  
**LA-CoNGA physics**



Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea





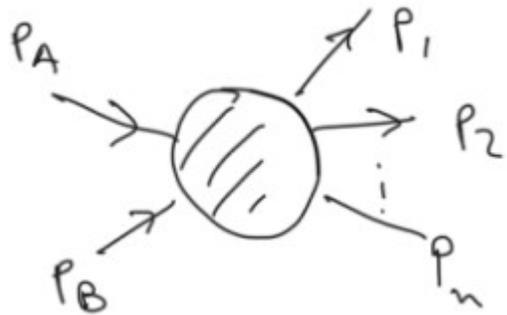
# En la clase pasada...

## Amplitudes de dispersión

$$i \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_A + p_B - \sum p_f \right)$$

= suma de *todos* los diagramas de Feynman  
completamente *conectados* y *amputados*

$$A + B \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$$



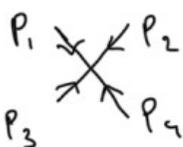
$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2E_A)(2E_B)|\vec{v}_A - \vec{v}_B|} d\Pi_{\text{LIPS}}$$



# En la clase pasada...

## Reglas de Feynman para $\lambda \phi^4$

1. Por cada propagador interno  $\xrightarrow{p}$   $= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

2. Por cada vértice   $= (-i\lambda)$ , se impone conservación del 4-momento

3. Por cada pata externa   $= 1$

4. Se integra sobre el momento (indeterminado!) de cada bucle  $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$

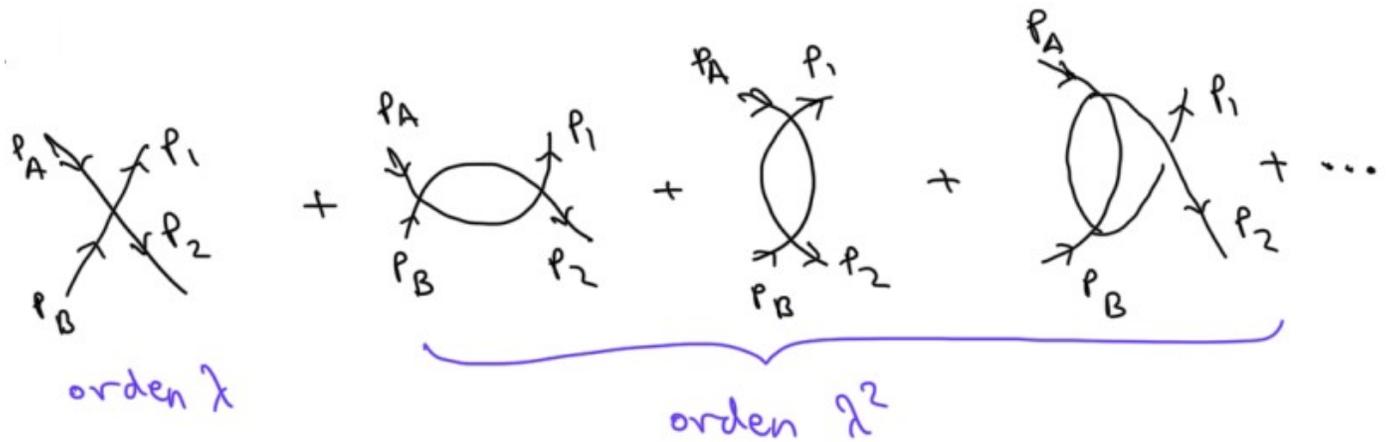
5. Se divide por el factor de simetría



# En la clase pasada...

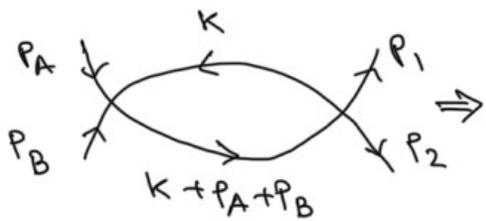
Ejemplo:  $A + B \rightarrow 1 + 2$  en  $\lambda \phi^4$

$$i \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) =$$



$$i \mathcal{M} = i \mathcal{M}_1 + i \mathcal{M}_2 + \dots$$

$$\mathcal{M}_1 = -\lambda, \quad \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_2(s) + \mathcal{M}_2(t) + \mathcal{M}_2(u)$$



$$i \mathcal{M}_2(s) = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \underbrace{\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k + p_A + p_B)^2 - m^2 + i\epsilon}}_{\text{integral divergente!}}$$

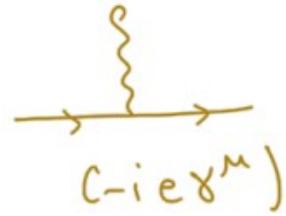
$\mathcal{M}_2(t)$  y  $\mathcal{M}_2(u)$  similares  $\leftarrow$  tarea!



# En la clase pasada...

Se generaliza a otras teorías, adaptando vértices y propagadores

→ Ejemplo: QED



$$p \rightarrow \frac{i(\gamma^M p_M + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

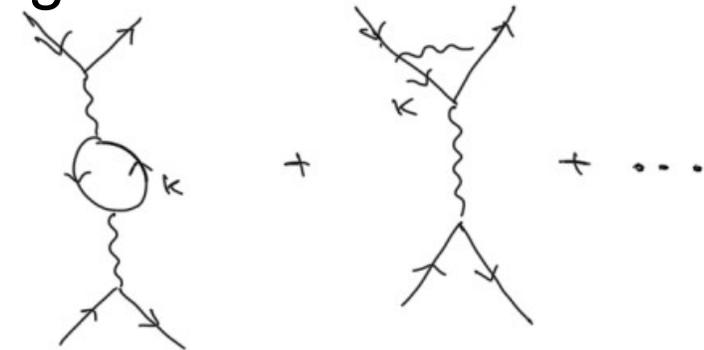
Choque elástico  $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$

Diagramas a nivel de árbol



nada que integrar

Diagramas a 1 bucle



integral  $\int d^4k$  divergente!

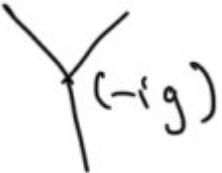


# En la clase pasada...

“Toy model”  $g \phi^3$

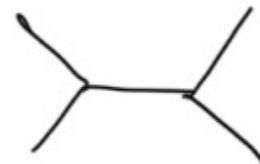
$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2}_{\mathcal{L}_0 \text{ de Klein Gordon}} + \frac{1}{3!} g \phi^3$$

→ propagador  $\xrightarrow{p}$    $= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

→ vértice  $\mathcal{L}_I = \frac{1}{3!} g \phi^3 \rightarrow$    $(-ig)$

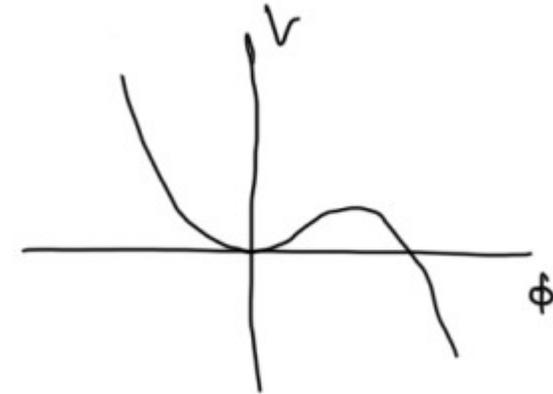
\* Choque elástico  $\phi \phi \rightarrow \phi \phi$

→ ahora hay diagramas a nivel árbol



a orden  $g^2$

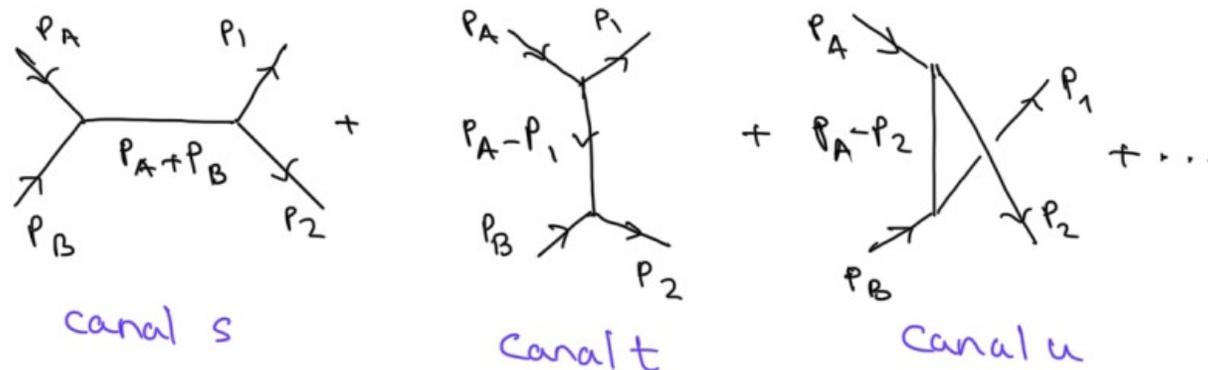
$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{6} g \phi^3$$





# En la clase pasada...

$$i \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) =$$



Ya se ha impuesto la conservación del 4-momento en un vértice  
 en el otro aparece  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2)$

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_2(s) + \mathcal{M}_2(t) + \mathcal{M}_2(u)$$

$$i \mathcal{M}_2(s) = (-ig) \frac{i}{(p_A + p_B)^2 - m^2 + i\epsilon} (-ig) = \frac{-ig^2}{s - m^2 + i\epsilon}, \quad s = (p_A + p_B)^2$$

$$i \mathcal{M}_2(t) = \frac{-ig^2}{t - m^2 + i\epsilon}, \quad t = (p_A - p_1)^2$$

$$i \mathcal{M}_2(u) = \frac{-ig^2}{u - m^2 + i\epsilon}, \quad u = (p_A - p_2)^2$$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{CM}} = \frac{g^4}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} \left[ \frac{1}{s - m^2} + \frac{1}{t - m^2} + \frac{1}{u - m^2} \right]^2 + \mathcal{O}(g^8)$$



# En la clase pasada...

## Variables de Mandelstam

$$A + B \rightarrow 1 + 2$$

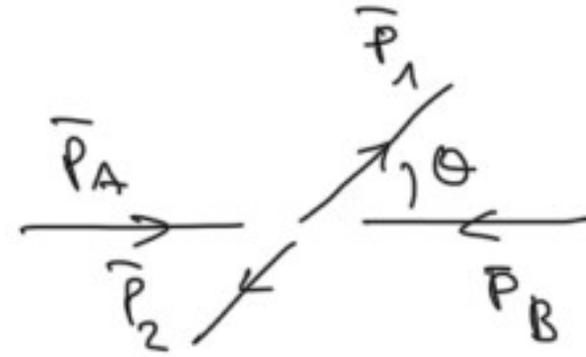
Hay 2 variables cinemáticas independientes:  $E_{\text{CM}}$  y  $\theta$   
pero es conveniente introducir 3

$$s = (p_A + p_B)^2 = (p_1 + p_2)^2$$

$$t = (p_A - p_1)^2 = (p_B - p_2)^2$$

$$u = (p_A - p_2)^2 = (p_B - p_1)^2$$

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_1^2 + m_2^2$$



En el centro de masa, con  $m_A = m_B = m_1 = m_2$

$$s = E_{\text{CM}}^2, \quad t = -2|\vec{p}_1|^2 (1 - \cos \theta), \quad u = -2|\vec{p}_1|^2 (1 + \cos \theta) \quad \leftarrow \text{tarea :-)}$$

# Divergencias en las Integrales de Feynman





# Divergencias en los diagramas de Feynman

$$\mathcal{I}_F \sim \underbrace{\int d^4k_1 \int d^4k_2 \cdots \int d^4k_L}_{1 \text{ integral por bucle}} \underbrace{\frac{1}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \cdots \frac{1}{k_L^2 - m^2 + i\epsilon}}_{1 \text{ propagador por cada línea interna}}$$

$L = \# \text{ de bucles} \qquad I = \# \text{ de líneas internas}$

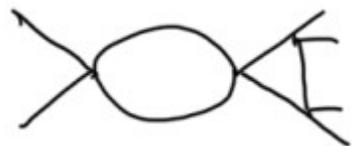


$$\mathcal{I}_F \sim \frac{(\text{momento})^{4L}}{(\text{momento})^{4I}}$$

Grado de divergencia *superficial*:  **$D = 4L - 2I$**

\*  $D \geq 0$ : es divergente

\*  $D < 0$ : *puede* ser divergente



$D = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 5 = -8$ , pero incluye



divergente...



# Divergencias en los diagramas de Feynman

# de bucles  $L$  y # de líneas internas  $I$  se relacionan con

$E = \#$  líneas externas y  $V = \#$  vértices

$$L = I - (V - 1)$$

$L$  cuenta el número de momentos independientes  $k$ . En principio hay tantos  $k$  como líneas internas, pero en cada vértice hay una delta de conservación del 4-momento. Una delta es global. Se eliminan entonces  $V - 1$ .

$$4V = E + 2I$$

Los vértices de 4 puntas  $\rightarrow 4V$

Líneas internas cuentan la mitad, comienzan y termina en un vértice!



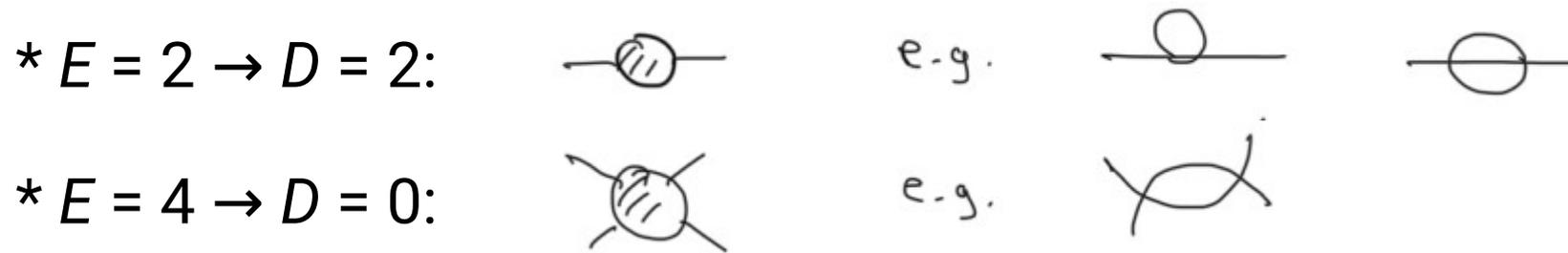
# Divergencias en los diagramas de Feynman

$$D = 4L - 2I = 4(I - V + 1) - 2I = 2I - 4V + 4 = 2I - E - 2I + 4 = 4 - E$$

$$D = 4 - E \quad \leftarrow \text{ Solo depende de } E$$

La teoría es simétrica bajo  $\phi \rightarrow -\phi$   
→ todas las amplitudes con  $E$  impar se anulan

Quedan 2 tipos de divergencias



( $E = 0 \rightarrow D = 4$ : es la divergencia en la energía del vacío, no observable)



# Divergencias en los diagramas de Feynman

Tarea :-)

\* Determinar  $D$  (grado de divergencia superficial)

para la teoría con

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda_N}{N!} \phi^N$$

en 4 dimensiones.

Considerar  $N = 3$  y  $N = 5$ .

# Regularización de Integrales de Feynman





# Regularización de Integrales de Feynman

Las integrales se regularizan, i.e. se hacen finitas, siguiendo un procedimiento sistemático tal como

**\* usar cut-off  $\Lambda$**

en las integrales se restringe  $|k| < \Lambda$

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \int^{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

**\* hacer regularización dimensional**

se considera la dimensión del espacio como un parámetro  $d$   
→ para  $d$  suficientemente pequeño las integrales convergen

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \quad \text{luego se expande en } \epsilon = 4 - d$$

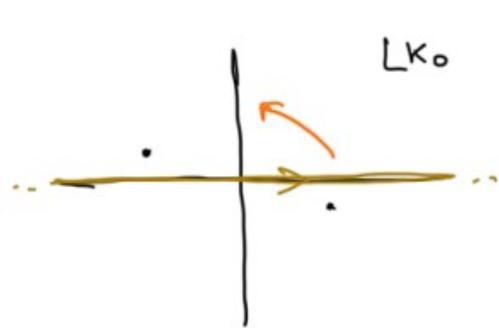


# Regularización de Integrales de Feynman

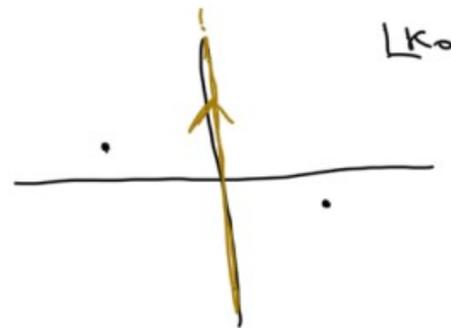
Paso previo: Rotación de Wick

(de Minkowski a espacio euclídeo)

Ejemplo 
$$\mathcal{I} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2}$$



$$k_0 = i k_4$$



$$k^2 = k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2$$

$$k^2 = -k_4^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 = -k_E^2$$

$$\rightarrow \mathcal{I} = i \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^2}$$

ventaja: pasar a coordenadas esféricas  $d^4 k_E = |k_E|^3 d|k_E| d\Omega_4$



Ejemplo 
$$\mathcal{I} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} = i \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^2}$$

$$\mathcal{I} = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d\Omega_4 \int_0^\Lambda d|k_E| \frac{|k_E|^3}{(|k_E|^2 + m^2)^2} \quad \int d\Omega_4 = 2\pi^2 \quad \begin{array}{l} \text{área de esfera} \\ k_4^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1 \end{array}$$

$$\mathcal{I} = \frac{i}{16\pi^2} \int_0^{\frac{\Lambda^2}{m^2}} du \frac{u}{(u+1)^2}$$

$$\mathcal{I} = \frac{i}{16\pi^2} \left[ \frac{-\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2} + \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 \right) \right]$$

→ divergencia *logarítmica*



# Evaluación vía Regularización Dimensional

Ejemplo  $\mathcal{I} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} = i \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^2}$

ahora:  $\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\Omega_d \int d|k_E| |k_E|^{d-1}$

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

$$\mathcal{I} = \frac{i}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int d|k_E| \frac{|k_E|^{d-1}}{(|k_E|^2 + m^2)^2}$$

$$\mathcal{I} = \frac{i}{(4\pi)^{d/2} m^{4-d}} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right)$$

$$\epsilon = 4 - d, \quad \text{en el límite } d \rightarrow 4, \epsilon \rightarrow 0$$

$$\Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \dots$$

polo en  $\epsilon = 0 \leftrightarrow$  divergencia logarítmica

$$\int_0^\infty du \frac{u^{\frac{d-2}{2}}}{(1+u)^2} = \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right)$$



# Regularización

$$* \mathcal{I} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - c^2 + i\epsilon)^2}$$

relevante para



\* Tarea :-)

$$\tilde{\mathcal{I}} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

relevante para

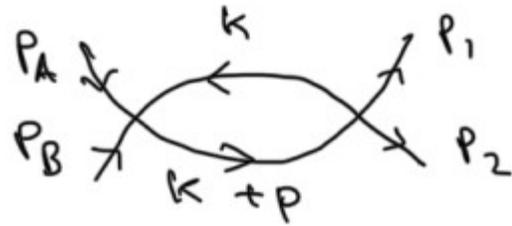


vía cut-off y regularización dimensional



# Evaluación vía cut-off

Regresamos a



$$p = p_A + p_B, \quad s = (p_A + p_B)^2$$

$$i\mathcal{M}_2(s) = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

se usa el truco de Feynman  $\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2}$

cambio de variable  $l \equiv k + xp$

$$i\mathcal{M}_2(s) = \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - c^2 + i\epsilon]^2}, \quad c^2 \equiv m^2 - x(1-x)s$$

$$i\mathcal{M}_2(s) \simeq \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{\Lambda^2}{m^2 - x(1-x)s} \right]$$

$$i\mathcal{M}_2(s) \simeq \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{s}$$

Próximamente...  
Renormalización





<http://laconga.redclara.net>



[contacto@laconga.redclara.net](mailto:contacto@laconga.redclara.net)



lacongaphysics



Latin American alliance for  
Capacity buildiNG in Advanced physics

**LA-CoNGA physics**



Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.