

# Módulo de Teoría

## Clase 10, 24-02-2022

Anamaría Font V.

Universidad Central de Venezuela

LA-CoNGA-physics

[mattermost.redclara.net@afont](mailto:mattermost.redclara.net@afont)



Latin American alliance for  
Capacity building in Advanced physics  
**LA-CoNGA physics**



Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea

UAN  
UNIVERSIDAD NACIONAL



UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE  
INGENIERÍA

UNMSM



UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

Université  
de Paris

TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN

UNIVERSITÄT  
DUISBURG  
ESSEN



CLARA

DBACCESS

frontier x  
ANALYTICS



## Renormalización

\* amplitud  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$

$$i\mathcal{M} = \text{X} + \text{fish} + \text{loop} + \text{self-energy} + o(\lambda^3)$$

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left( \log \frac{\Lambda^2}{s} + \log \frac{\Lambda^2}{t} + \log \frac{\Lambda^2}{u} \right) + o(\lambda^3)$$

$$i\mathcal{M} \Big|_{s_0, u_0, t_0} = -i\lambda_R$$

la amplitud define una constante de acoplo renormalizada o física

$\Rightarrow \lambda = \lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \left( \log \frac{\Lambda^2}{s_0} + \log \frac{\Lambda^2}{t_0} + \log \frac{\Lambda^2}{u_0} \right) + o(\lambda_R^3)$  y sustituyendo

$$i\mathcal{M} = -i\lambda_R + \frac{i\lambda_R^2}{32\pi^2} \left( \log \frac{s_0}{s} + \log \frac{t_0}{t} + \log \frac{u_0}{u} \right) + o(\lambda_R^3)$$

finita, independiente de  $\Lambda$

$$* \mathcal{G}^{(2)} = \text{---} \overset{k}{\leftarrow} \text{---} + \text{---} \overset{k}{\leftarrow} \text{---} \text{---} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$= \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (i\lambda C_1 \Lambda^2) \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

$$= \frac{i}{k^2 - m^2 + \lambda_1 C_1 \Lambda^2 + i\epsilon} = \frac{i}{k^2 - m_R^2 + i\epsilon} \quad \text{polo en } k^2 = m_R^2$$

$m_R^2$ : masa renormalizada  
o masa física

$$m_R^2 = m^2 - \lambda C_1 \Lambda^2$$

A orden  $\lambda^2$  aparece  con divergencia  $\lambda^2 (C_2 \Lambda^2 + C_3 k^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2})$

Se absorbe en renormalización del campo

$$\phi_R = \sqrt{1 + C_3 \lambda^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2}} \phi$$

$\downarrow$   
 $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$

### CONTRATÉRMINOS

Es más sistemático empezar con la teoría con los parámetros renormalizados y contratérminos que absorben las divergencias

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} m_R^2 \phi_R^2 - \frac{1}{4!} \lambda_R \phi_R^4 + \frac{1}{2} \delta_Z \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} \delta_m \phi_R^2 - \frac{1}{4!} \delta_\lambda \phi_R^4$$

3 contratérminos, uno para cada término original:  $\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$

$\delta_Z, \delta_m, \delta_\lambda$  dependen de  $\lambda_R$  y el cutoff  $\Lambda$  (o de  $\frac{1}{\epsilon}$  en regularización dimensional)

Se ajustan orden por orden para cancelar las divergencias

# Reglas de Feynman con contraterminos

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} m_R^2 \phi_R^2}_{\text{green}} - \underbrace{\frac{1}{4!} \lambda_R \phi_R^4}_{\text{purple}} + \underbrace{\frac{1}{2} \delta_2 \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} \delta_m \phi_R^2}_{\text{orange}} - \underbrace{\frac{1}{4!} \delta_\lambda \phi_R^4}_{\text{blue}}$$



$$\frac{i}{k^2 - m_R^2 + i\epsilon}$$

$$(-i\lambda_R) \otimes \times$$

$$i(k^2 \delta_2 - \delta_m)$$

$$(-i\delta_\lambda) \otimes \times$$

- + otras reglas usuales:
- integrar sobre momentos independientes
  - conservación de momento en vértices
  - dividir por factores de simetría

$\delta_m, \delta_\lambda, \delta_z$  se pueden determinar iterativamente imponiendo que el propagador a todo orden tiene polo en  $m_R^2$  con residuo 1, y la amplitud  $i\mathcal{M}(\phi\phi \rightarrow \phi\phi)$  en  $s_0, t_0, u_0$  es  $-i\lambda_R$ .

Iterativamente quiere decir orden por orden

$$\delta_m = \delta_m^{(0)} + \delta_m^{(1)} \lambda_R + \delta_m^{(2)} \lambda_R^2 + \dots, \quad \delta_z = \delta_z^{(0)} + \delta_z^{(1)} \lambda_R + \delta_z^{(2)} \lambda_R^2 + \dots$$

$$\delta_\lambda = \delta_\lambda^{(0)} + \delta_\lambda^{(1)} \lambda_R + \delta_\lambda^{(2)} \lambda_R^2 + \dots$$

orden 0

$\mu$

no hay orden 0, empieza con  $\times$  de orden  $\lambda_R \Rightarrow \delta_\lambda^{(0)} = 0$

propagador

$$\begin{array}{c} \leftarrow k \\ \leftarrow k \end{array} + \begin{array}{c} \leftarrow k \otimes \leftarrow k \\ \leftarrow k \end{array} \sim \frac{i}{k^2 - m_R^2 + i\epsilon} + \frac{(i\delta_z k^2 - \delta_m)}{(k^2 - m_R^2 + i\epsilon)^2}$$

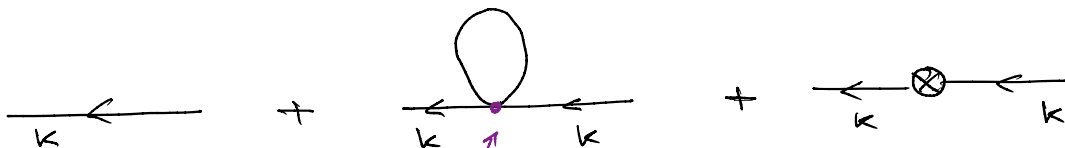
polo en  $m_R^2$  con residuo 1

$$\Rightarrow \delta_z^{(0)} = 0, \quad \delta_m^{(0)} = 0$$

orden 1

$$\underline{\mu} \quad iM = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \circ \\ \diagdown \end{array} = -i\lambda_R - i\delta_\lambda$$

$iM(\phi\phi \rightarrow \phi\phi)$  en  $s_0, t_0, u_0$  es  $-i\lambda_R \Rightarrow \delta_\lambda^{(1)} = 0$

Propagador

$$\frac{i}{k^2 - m_R^2 + i\epsilon} + \frac{i}{k^2 - m_R^2 + i\epsilon} \left( i\lambda_R C_1 \Lambda^2 + i\delta_2 k^2 - i\delta_m \right) \frac{i}{k^2 - m_R^2 + i\epsilon}$$

polo en  $m_R^2$  con residuo 1  $\Rightarrow \delta_m^{(1)} = iC_1 \Lambda^2$ ,  $\delta_2^{(1)} = 0$



orden 2  $\mu$

$$i\mathcal{M} = \text{X} + \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4}$$

$$= -i\lambda_R + \frac{i\lambda_R^2}{32\pi^2} \left[ \log \frac{\Lambda^2}{s} + \log \frac{\Lambda^2}{t} + \log \frac{\Lambda^2}{u} \right] - i\delta_\lambda$$

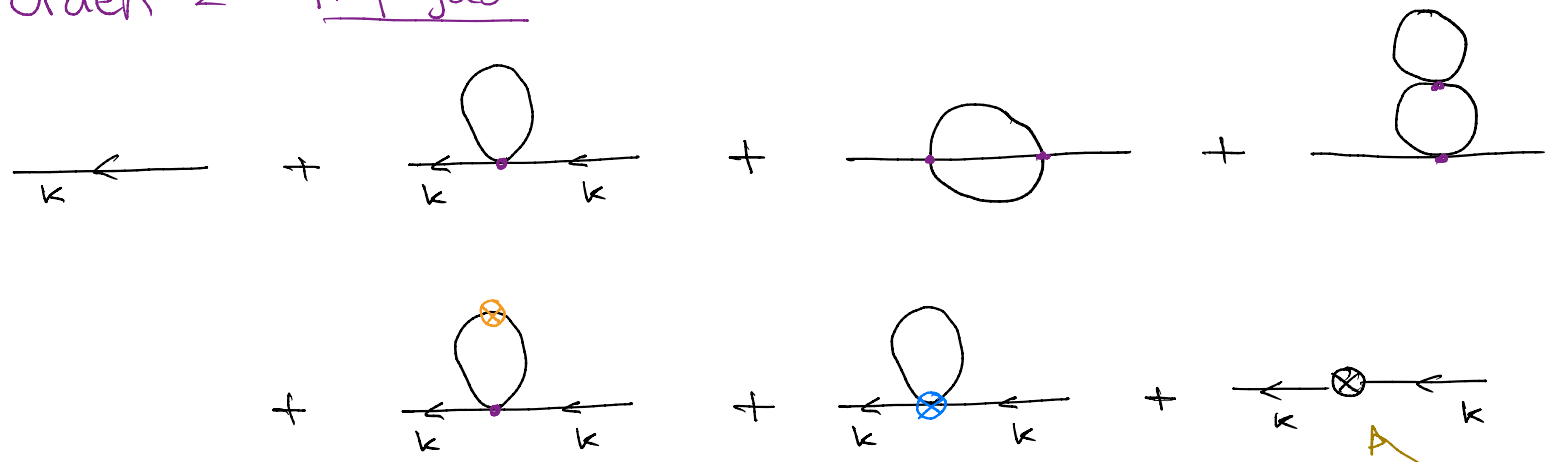
$$i\mathcal{M} \Big|_{s_0, t_0, u_0} = -i\lambda_R \Rightarrow \delta_\lambda^{(2)} = \frac{1}{32\pi^2} \left[ \log \frac{\Lambda^2}{s_0} + \log \frac{\Lambda^2}{t_0} + \log \frac{\Lambda^2}{u_0} \right]$$

notar que sustituyendo  $\delta_\lambda = \delta_\lambda^{(2)} \lambda_R^2$  se obtiene

$$i\mathcal{M} = -i\lambda_R + \frac{i\lambda_R^2}{32\pi^2} \left[ \log \frac{s_0}{s} + \log \frac{t_0}{t} + \log \frac{u_0}{u} \right] + \mathcal{O}(\lambda_R^3)$$

igual que antes

# orden 2 propagador



$$\sim \lambda_R \cdot \delta_m^{(1)} \lambda_R$$

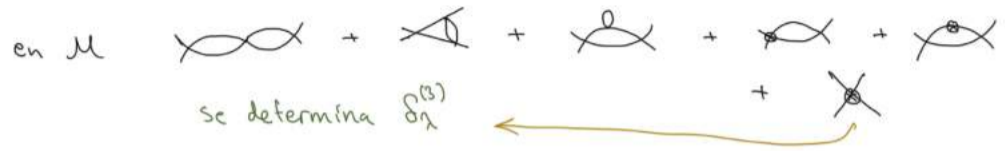
$$\sim \delta_\lambda^{(2)} \lambda_R^2$$

$\delta_m^{(1)}, \delta_z^{(1)}, \delta_\lambda^{(2)}$   
ya estaban

cancelación de divergencias fija

$\delta_z^{(2)}, \delta_m^{(2)}$

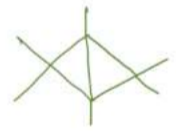
orden 3



Teorema BPHZ Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann

Este procedimiento elimina todas las divergencias

incluyendo e.g. en



para el cual no hay  
contratérmino



# Lagrangiano "desnudo" (bare)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} m_R^2 \phi_R^2 - \frac{1}{4!} \lambda_R \phi_R^4 + \frac{1}{2} \delta_Z \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} \delta_m \phi_R^2 - \frac{1}{4!} \delta_\lambda \phi_R^4 \\ &= \frac{1}{2} (1 + \delta_Z) \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} (m_R^2 + \delta_m) \phi_R^2 - \frac{1}{4!} (\lambda_R + \delta_\lambda) \phi_R^4 \end{aligned}$$

se definen  $\phi_0, m_0, \lambda_0$  : campo, masa y constante de acoplo desnudos

$$\phi_0 = (1 + \delta_Z)^{1/2} \phi_R, \quad m_0^2 = \frac{m_R^2 + \delta_m}{1 + \delta_Z}, \quad \lambda_0 = \frac{\lambda_R + \delta_\lambda}{(1 + \delta_Z)^2}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4$$

$\phi_0, \lambda_0, m_0$  son los  $\phi, \lambda, m$  en el  $\mathcal{L}$  original,  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$

La chiqueta "0" sirve para distinguirlos de los  $\phi_R, \lambda_R, m_R$  físicos ó renormalizados

\* procedimiento estándar  
de entrada tenemos campos y parámetros desnudos, pero para simplificar  
no se les pone la etiqueta "0"

\* para renormalizar (necesario porque existen divergencias) se introducen  
los campos + parámetros renormalizados (físicos) y se separan los  
contratérminos.

$\phi_0, m_0, \lambda_0$  también se pueden definir de forma multiplicativa, i.e

$$\phi_0 = Z_\phi^{1/2} \phi_R, \quad m_0^2 = \frac{Z_m}{Z_\phi} m_R^2, \quad \lambda_0 = \frac{Z_\lambda}{Z_\phi^2} \lambda_R$$

Ejercicio: a partir de  

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4$$
  
 hallar los contratérminos

\* se regularizan las divergencias, por ejemplo con  $\Lambda$  ó  $\epsilon = 4-d$

\* para determinar la dependencia de  $\delta_\lambda, \delta_z, \delta_m$  (ó  $Z_\phi, Z_m, Z_\lambda$ ) de  $\lambda_R$  se usa un esquema de sustracción de divergencias. Aquí usamos un esquema de sustracción tal que el polo del propagador se mantiene en  $m_R^2$  y  $\mathcal{M}(\phi\phi \rightarrow \phi\phi) = -\lambda_R$  a escala  $s_0, t_0, u_0$ .

Otros esquemas:  $MS, \overline{MS}$

RGE

Ecuación del grupo de renormalización

No hay relación con teoría de grupos. Hay una ecuación  
El nombre se debe a que la ecuación describe como cambia la  
teoría cuando se redefinen las constantes de acoplo renormalizadas

En  $\lambda\phi^4$ , definimos  $\lambda_R = -\mathcal{M}(s_0, t_0, u_0)$  y encontramos

$$\mathcal{M} = -\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \left( \log \frac{s_0}{s} + \log \frac{t_0}{t} + \log \frac{u_0}{u} \right) + O(\lambda_R^3)$$

Es conveniente escoger  $s_0 = u_0 = t_0 = \mu^2$   $\mu$  es una escala de energía

$$\mathcal{M} = -\lambda_R(\mu) + \frac{\lambda_R^2(\mu)}{32\pi^2} \left( \log \frac{\mu^2}{s} + \log \frac{\mu^2}{t} + \log \frac{\mu^2}{u} \right) + O(\lambda_R^3)$$

$\lambda_R(\mu)$  es el acoplo apropiado para  $s, t, u$  de orden  $\mu^2$  tal que  $\log \frac{\mu^2}{s} \ll 1$



también se puede usar otra escala  $\mu'$

$$\mathcal{M} = -\lambda_R(\mu') + \frac{\lambda_R^2(\mu')}{32\pi^2} \left( \log \frac{\mu'^2}{s} + \log \frac{\mu'^2}{t} + \log \frac{\mu'^2}{u} \right) + O(\lambda_R^3)$$

Pero entonces

$$-\lambda_R(\mu) = -\lambda_R(\mu') + \frac{\lambda_R^2(\mu')}{32\pi^2} \left( \log \frac{\mu'^2}{\mu^2} + \log \frac{\mu'^2}{\mu^2} + \log \frac{\mu'^2}{\mu^2} \right) + O(\lambda_R^3)$$

$$\Rightarrow \lambda_R(\mu') = \lambda_R(\mu) + \frac{3\lambda_R^2(\mu)}{16\pi^2} \log \frac{\mu'}{\mu} + O(\lambda_R^3)$$

$\mu' = \mu + d\mu$

$$\Rightarrow \boxed{\mu \frac{d\lambda_R}{d\mu} = \frac{3\lambda_R^2}{16\pi^2} + O(\lambda_R^3)} \quad \text{RGE}$$

Para simplificar (y conectar con la literatura), eliminamos la etiqueta  $R$

En general la ecuación es

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = \beta(g)$$

$g$ : *running coupling constant*  
 constante de acoplamiento efectiva  
 $\beta(g)$ : *función  $\beta$*

$$\text{En } \lambda\phi^4, \quad g = \lambda, \quad \beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$\text{En QED}, \quad g = e, \quad \beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} + \mathcal{O}(e^5)$$

$$\text{En QCD} \quad g = g_s, \quad \beta(g_s) = -\frac{g_s^3}{16\pi^2} \left( 11 - \frac{2}{3} n_f \right) + \mathcal{O}(g_s^5)$$

*incluyendo  
quarks*

$$n_f = 6$$

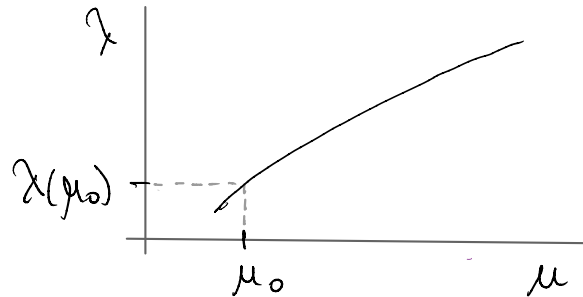
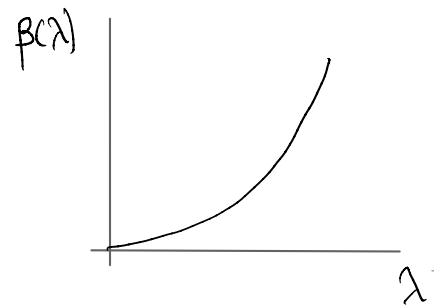
$n_f = \#$  de sabores en el Modelo Estándar:  $u, d, e, s, b, t$

$$\lambda \phi^4, \quad \mu \frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + o(\lambda^3)$$

Solución (ignorando  $o(\lambda^3)$ )

$$\frac{d\lambda}{\lambda^2} = \frac{3}{16\pi^2} \frac{d\mu}{\mu} \Rightarrow -\frac{1}{\lambda(\mu)} + \frac{1}{\lambda(\mu_0)} = \frac{3}{16\pi^2} \log \frac{\mu}{\mu_0}$$

$$\lambda(\mu) = \frac{\lambda(\mu_0)}{1 - \frac{3}{16\pi^2} \lambda(\mu_0) \log \frac{\mu}{\mu_0}}$$



si empezamos con  $\lambda(\mu_0) \ll 1$ ,  $\lambda(\mu)$  crece.

Eventualmente la teoría de perturbaciones deja de ser válida.

Asumiendo  $\beta(\lambda) = 3\lambda^2/16\pi^2$  incluso para  $\lambda$  grande, entonces

$\lambda(\mu)$  explotaría en

$$\mu = \mu_0 \exp \left[ \frac{16\pi^2}{3\lambda(\mu_0)} \right]$$

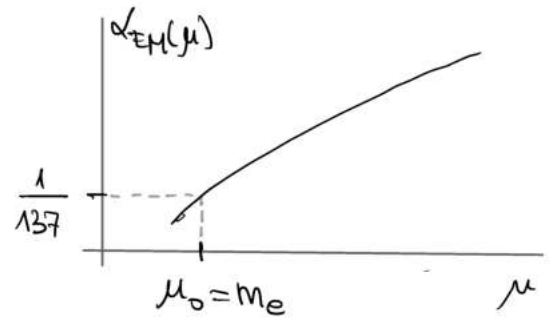
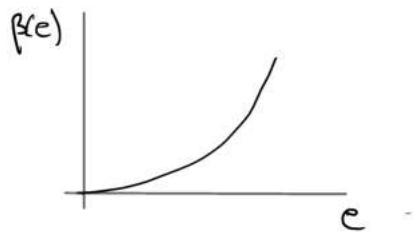
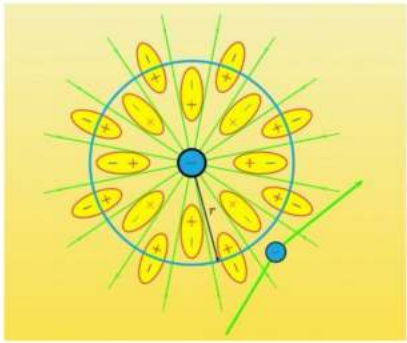
polo de Landau

QED ,  $\mu \frac{d e}{d \mu} = \frac{e^3}{12 \pi^2} + O(e^5)$

$\alpha_{EM} = \frac{e^2}{4 \pi}$  ,  $\mu \frac{d \alpha_{EM}}{d \mu} = \frac{2}{3 \pi} \alpha_{EM}^2 + \dots$

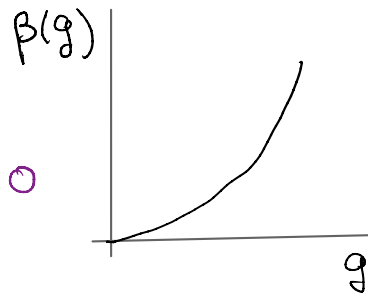
$\alpha_{EM}(\mu) = \frac{\alpha_{EM}(\mu_0)}{1 - \frac{2}{3 \pi} \alpha_{EM}(\mu_0) \log \frac{\mu}{\mu_0}}$

$\alpha_{EM}$  crece cuando la energía aumenta,  
 decrece cuando la energía disminuye,  
 por el efecto de apantallamiento



$m_e = 511 \text{ keV}$   
 $\alpha_{EM}(m_e) = \frac{1}{137} = \frac{g_e^2}{4 \pi \epsilon_0 \hbar c}$   
 $m_Z = 91 \text{ GeV}$   
 $\alpha_{EM}(m_Z) \sim \frac{1}{127}$

En  $\lambda\phi^4$  y QED,  $\mu \frac{dg}{d\mu} = \beta(g)$




$$\beta(0) = 0, \quad \beta'(0) > 0$$

\*  $g=0$  es un punto fijo

\* cerca de  $g=0$ ,  $\frac{dg}{d\mu} > 0 \Rightarrow g$  decrece cuando  $\mu$  decrece  
 $g=0$  es un punto fijo estable IR

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = \beta'(0)g$$

¿Qué pasa si  ?  $\beta(0) = 0, \beta'(0) < 0$

$g=0$  es un punto fijo pero cerca de  $g=0$ ,  $\frac{dg}{d\mu} < 0$

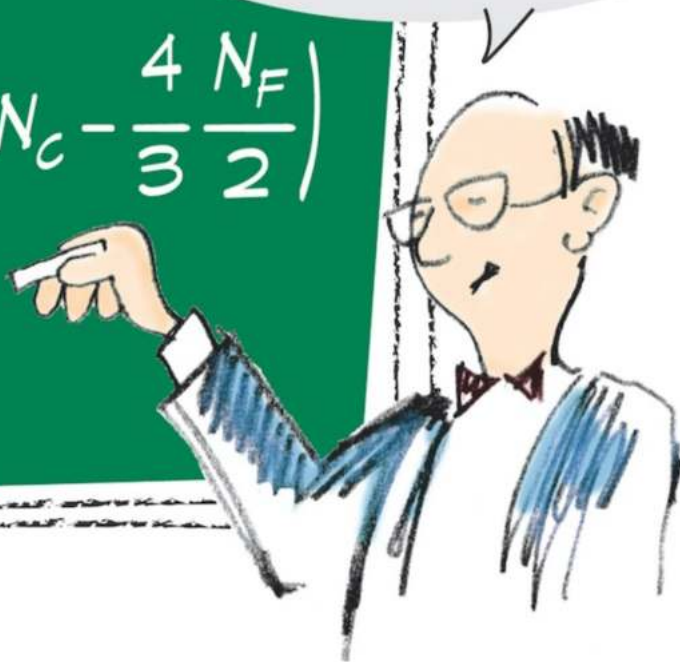
$g$  decrece cuando  $\mu$  aumenta

$g=0$  es un punto fijo estable UV

Este es el fenómeno de LIBERTAD ASINTÓTICA. Ocurre en QCD

$$\beta(g) = \frac{-g^3}{16\pi^2} \left( \frac{11}{3} N_c - \frac{4}{3} \frac{N_F}{2} \right)$$

In QCD and the Standard Model  
the beta function is indeed  
negative!



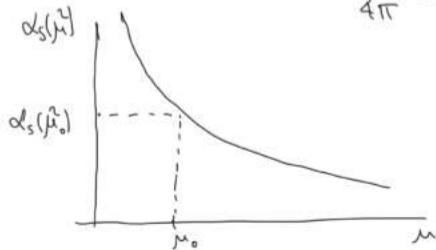
# QCD incluyendo quarks

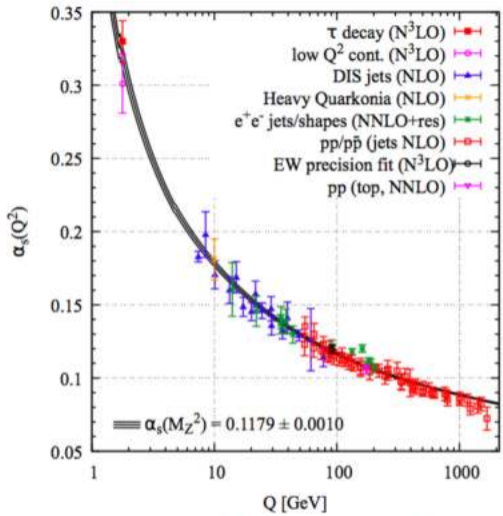
$$\mu \frac{dg_s}{d\mu} = - \left( \underbrace{7 \frac{g_s^3}{16\pi^2}}_{1\text{-laço}} + \underbrace{b_1 g_s^5}_{2\text{-laços}} + \underbrace{b_2 g_s^7}_{3\text{-laços}} + \dots \right)$$

Con el resultado a un laço

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{\alpha_s(\mu_0^2)}{1 + \frac{7}{4\pi} \alpha_s(\mu_0^2) \log\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right)}$$

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$$





$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$$

Figure 9.3: Summary of measurements of  $\alpha_s$  as a function of the energy scale  $Q$ . The respective degree of QCD perturbation theory used in the extraction of  $\alpha_s$  is indicated in brackets (NLO: next-to-leading order; NNLO: next-to-next-to-leading order; NNLO+res.: NNLO matched to a resummed calculation; N<sup>3</sup>LO: next-to-NNLO).



### 94.5 Gauge coupling unification

The quantitative unification of the three SM gauge couplings at the energy scale  $M_G$  is one of the cornerstones of the GUT paradigm. It is obviously of direct phenomenological relevance. Gauge coupling unification is well understood in the framework of effective field theory (EFT) [60]. In the simplest case, the relevant EFT at energies  $\mu \gg M_G$  has a unified gauge symmetry (say  $SU(5)$  for definiteness) and a single running gauge coupling  $\alpha_G(\mu)$ . At energies  $\mu \ll M_G$ , states with mass  $\sim M_G$  (such as  $X$  bosons, GUT Higgs, color-triplet Higgs) have to be integrated out. The EFT now has three independent couplings and SM (or SUSY SM) matter content. One-loop renormalization group equations readily allow for an extrapolation to the weak scale,

$$\alpha_i^{-1}(m_Z) = \alpha_G^{-1}(M_G) + \frac{b_i}{2\pi} \log\left(\frac{M_G}{m_Z}\right) + \delta_i, \quad (94.3)$$

( $i = 1, 2, 3$ ). Here we defined  $\delta_i$  to absorb all sub-leading effects, such as threshold corrections at or near the weak scale (e.g. from superpartners and the additional Higgs bosons in the case of the MSSM) and at the GUT scale, and also higher-order corrections. We will discuss them momentarily.

It is apparent from Eq. (94.3) that the three low-scale couplings can be very different. This is due to the large energy range  $m_Z \ll \mu \ll M_G$  and the non-universal  $\beta$ -function coefficients ( $b_i^{\text{SM}} = \{41/10, -19/6, -7\}$  or  $b_i^{\text{MSSM}} = \{33/5, 1, -3\}$ ). Incomplete GUT multiplets, such as gauge and Higgs bosons in the SM and also their superpartners and the additional Higgs bosons in the MSSM, contribute to the differences between the  $\beta$  functions. Inverting the argument, one expects that extrapolating the measured couplings to the high scale, we find quantitative unification at  $\mu \sim M_G$ . While this fails in the SM, it works intriguingly well in the MSSM (cf. Fig. 94.1).

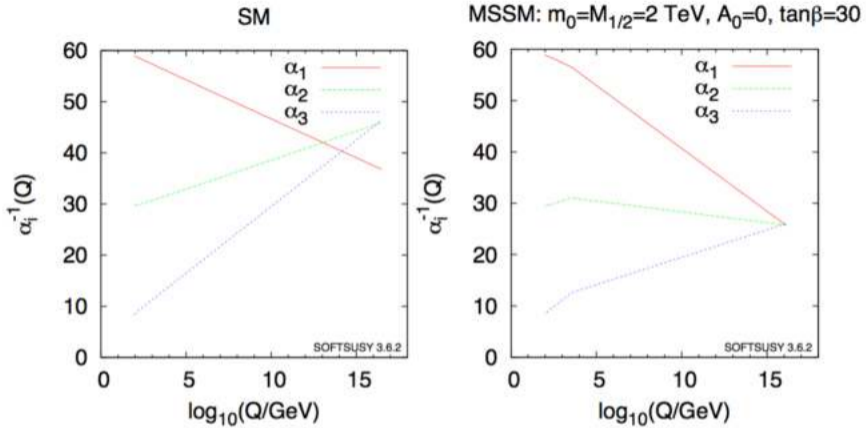


Figure 94.1: Running couplings in SM and MSSM using two-loop RG evolution. The SUSY threshold at 2 TeV is clearly visible on the MSSM side. (We thank Ben Allanach for providing the plots created using SOFTSUSY [61].)

Próximamente

ruptura espontánea de simetría



<http://laconga.redclara.net>



[contacto@laconga.redclara.net](mailto:contacto@laconga.redclara.net)



lacongaphysics



Latin American alliance for  
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.