

Módulo de Teoría: Teoría Cuántica de Campos

Nicolás BERNAL
New York University Abu Dhabi

23/4/2024



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea



Ruputra espontánea de la simetría



Ruputra espontánea de la simetría



<https://www.quora.com/Quantum-Field-Theory-What-is-spontaneous-symmetry-breaking>



Ruputra espontánea de la simetría



(a) Unbroken symmetry: the rod in its original state is rotationally invariant



(b) Explicitly broken symmetry: the rod bends due to an external force and loses rotational invariance

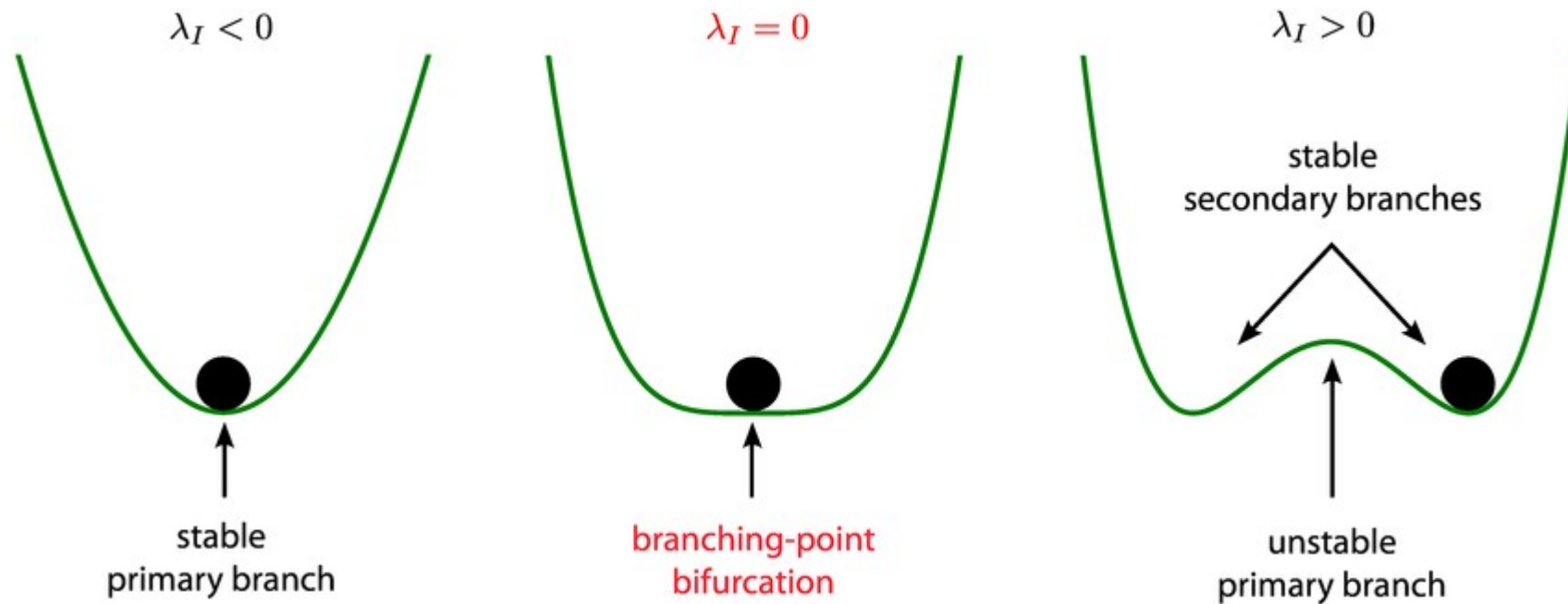


(c) Spontaneously broken symmetry: the rod bends in an arbitrary direction and loses rotational invariance

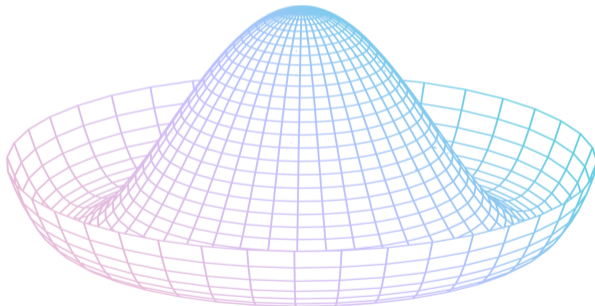
Figure 1: Spontaneous symmetry breaking as seen in the bending of a rod



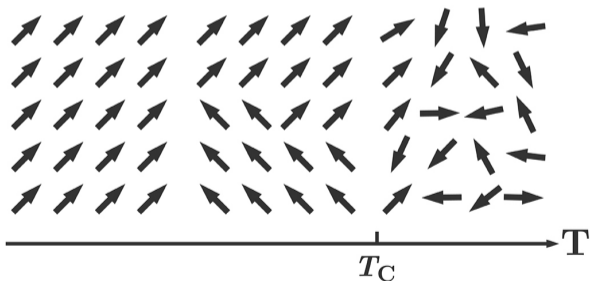
Ruputra espontánea de la simetría



Ruptura espontánea de simetría



- ▷ idea: Hamiltoniano invariante, i.e. simétrico, bajo transformación de los campos, pero el estado de mínima energía no es invariante, i.e. rompe la simetría
- ▷ ejemplo: magnetización \vec{M} en materiales ferromagnéticos
 H es invariante bajo rotaciones pero $\langle \vec{M} \rangle \neq 0$ a temperaturas $T < T_C$



Se quiere estudiar ruptura espontánea de simetría (RES) en teoría de campos. Consideraremos campos escalares y analizaremos tres casos

- * simetrías discretas, e.g. \mathbb{Z}_2 : $\phi \rightarrow -\phi$
- * simetrías continuas globales: $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$
- * simetrías continuas locales: $\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi$

En general, N campos escalares

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - V(\phi_1, \dots, \phi_N), \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\partial_0 \phi_i)^2 + (\vec{\nabla} \cdot \phi_i)^2 + V(\phi_1, \dots, \phi_N)$$

estado de mínima energía $\Rightarrow \phi_i$ constante, independiente de t, \vec{x}
"vacío" mínimo de $V(\phi_1, \dots, \phi_N)$

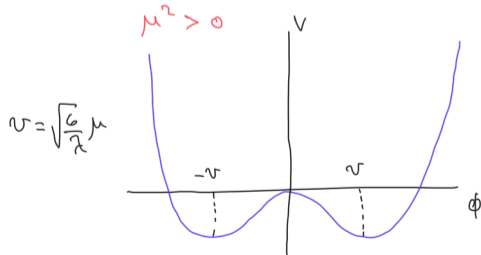
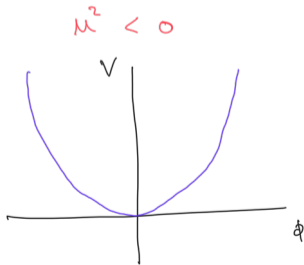
Ruptura de simetría discreta

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

$$\begin{aligned} \phi' &= -\phi \\ \mathcal{L}' &= \mathcal{L} \end{aligned}$$

- invariante bajo transformación \mathbb{Z}_2 : $\phi \rightarrow -\phi$
- $\lambda > 0$, pero μ^2 puede ser > 0 ó < 0

$$V = -\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad \frac{dV}{d\phi} = \phi(-\mu^2 + \frac{\lambda}{6} \phi^2), \quad \frac{d^2V}{d\phi^2} = -\mu^2 + \frac{\lambda}{3} \phi^2$$



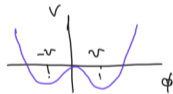
$$\mu^2 < 0 \quad \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad \frac{d^2V}{d\phi^2} > 0 \Rightarrow \text{mínimo en } \phi = 0$$



la simetría no se rompe

\mathcal{L} describe campo escalar real ϕ con $m_\phi = -\mu^2 > 0$

$$\mu^2 > 0 \quad \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad \frac{d^2V}{d\phi^2} > 0 \Rightarrow \text{mínimo en } \phi = \pm v, \quad v = \sqrt{\frac{6}{\lambda}} \mu$$



Como \mathcal{L} es invariante bajo $\phi \rightarrow -\phi$ se puede escoger uno de los dos mínimos, Escogemos v y al hacerlo se rompe la simetría

$$\text{En el mínimo} \quad \langle \phi \rangle = v = \sqrt{\frac{6}{\lambda}} \mu$$

valor de expectación de vacío (vev) de ϕ

Para analizar la teoría en el vacío asimétrico se hace el cambio

$$\phi(x) = \sigma(x) + v \quad \text{tal que} \quad \langle \sigma \rangle = 0$$

Sustituyendo en $\mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \underbrace{\frac{1}{2} (2\mu^2) \sigma^2}_{-\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2} - \sqrt{\frac{\lambda}{6}} \mu \sigma^3 - \frac{\lambda}{4!} \sigma^4 + \text{const.}$
(ejercicio)

\mathcal{L} describe escalar real σ con $m_\sigma = \sqrt{2} \mu$
 σ tiene interacciones cúbicas y cuárticas



La simetría $\phi \rightarrow -\phi$ no es aparente, está presente en relaciones entre los coeficientes de términos, $\sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$.

De hecho \mathcal{L} es invariante bajo $\sigma \rightarrow -\sigma - 2v$

Ruptura de simetrías continuas globales

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2} \partial^\mu \phi_2 \partial_\mu \phi_2 + \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \quad \text{modelo } O(2)$$

invariante bajo $\phi_i \rightarrow R_{ij} \phi_j$, R matriz 2×2 ortogonal, $R^T R = \mathbb{1}$

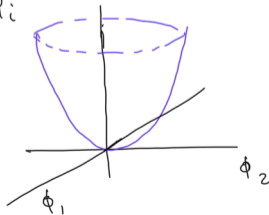
e.g. $R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, ángulo α es un parámetro continuo

$$V(\phi_1, \phi_2) = -\frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2, \quad \frac{\partial V}{\partial \phi_i} = \phi_i (-\mu^2 + \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2))$$

$\mu^2 < 0$ mínimo en $\phi_1 = \phi_2 = 0$

no hay RES

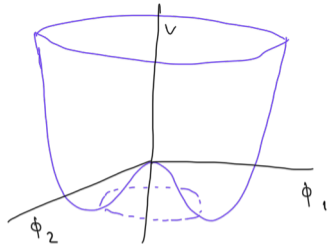
$$m_1^2 = -\mu^2, \quad m_2^2 = -\mu^2$$



$$\mu^2 > 0$$

familia de mínimos
en $\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$

la longitud de $\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ está fijada



la dirección es arbitraria. se elige $\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\langle \phi_1 \rangle = v, \quad \langle \phi_2 \rangle = 0$$

cambio de variable $\phi_1(x) = \sigma(x) + v$, $\phi_2(x) = \pi(x)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} (2\mu^2) \sigma^2 - \sqrt{\lambda} \mu \sigma^3 - \frac{\lambda}{4} \sigma^4 - \sqrt{\lambda} \mu \sigma \pi^2 - \frac{\lambda}{2} \pi^2 \sigma^2 - \frac{\lambda}{4} \pi^4 + \text{const.}$$

σ campo masivo $m_\sigma = \sqrt{2}\mu$.

π campo de masa nula: bosón de Goldstone

Propagadores

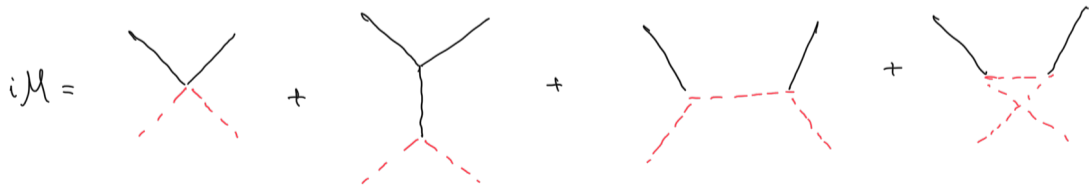
$$\sigma \frac{k}{\frac{i}{k^2 - 2\mu^2 + i\epsilon}}$$

vértices



$$\pi \frac{k}{\frac{i}{k^2 + i\epsilon}}$$

Ejercicio choque $\sigma\pi \rightarrow \sigma\pi$ a nivel árbol



$\mathcal{M} \rightarrow 0$ cuando el momento de π 's $\rightarrow 0$

Generalización modelo $O(N)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i + \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \dots + \phi_N^2) - \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \dots + \phi_N^2)^2$$

invariante bajo $\phi_i \rightarrow R_{ij} \phi_j$, R matriz $N \times N$ ortogonal $R^T R = 1$

hay $\frac{N(N-1)}{2}$ parámetros continuos: ángulos de rotación en los distintos $\frac{N(N-1)}{2}$ planos

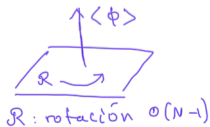
$\mu^2 < 0$ mínimo simétrico en $\phi_i = 0$
 \mathcal{L} describe N escalares reales con $m_i^2 = -\mu^2$

$\mu^2 > 0$ familia de mínimos en $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \dots + \phi_N^2 = v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$ ejercicio

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v \end{pmatrix}$$

$\leftarrow O(N)$ se rompe a $O(N-1)$

$$R = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{R} & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & 1 \end{array} \right) \text{ deja } \langle \phi \rangle \text{ invariante}$$



$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \pi_1(x) \\ \vdots \\ \pi_{N-1}(x) \\ \sigma(x) + v \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{L} = \sum_{a=1}^{N-1} \frac{1}{2} \partial_\mu \pi_a \partial^\mu \pi_a + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} (2\mu^2) \sigma^2 - \sqrt{\lambda} \mu \sigma^3 - \frac{\lambda}{4} \sigma^4$$

$$- \sqrt{\lambda} \mu \sigma (\pi_1^2 + \dots + \pi_{N-1}^2) - \frac{\lambda}{2} \sigma^2 (\pi_1^2 + \dots + \pi_{N-1}^2) - \frac{\lambda}{4} (\pi_1^2 + \pi_2^2 + \dots + \pi_{N-1}^2)^2$$

σ masivo $m_\sigma = \sqrt{2} \mu$

$\pi_k, k=1, \dots, N-1$ masa nula
(N-1) bosones de Goldstone

* $\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \Big|_{\phi_1^2 + \dots + \phi_N^2 = v^2} = 2\lambda \phi_i \cdot \phi_j$ autovalores $\underbrace{0, \dots, 0}_{N-1}, 2\mu^2$

* # de simetrías rotas = # de bosones de Goldstone

$$\frac{N(N-1)}{2} \downarrow - \frac{(N-1)(N-2)}{2} = N-1$$

$O(N)$ $O(N-1)$

Teorema de Goldstone

Por cada simetría continua interna rota espontáneamente existe una partícula de masa nula, llamada bosón de Goldstone

demo: ϕ_i campos escalares, $\mathcal{L} = \text{términos cinéticos} - V(\phi_1, \dots, \phi_N)$
reales

\mathcal{L} invariante bajo transformaciones de un grupo G

$$\phi'_i = \underbrace{\left(e^{i\alpha_a T^a} \right)}_{\text{matriz}} \phi_j, \quad \alpha_a \text{ infinitesimal} \quad \phi'_i = (\delta_{ij} + i\alpha_a T^a_{ij} + \dots) \phi_j$$

$a = 1, \dots, \dim G$, T^a : generador de G

ejemplos: $G = SO(2)$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{i\alpha T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\dim G = 1$

$$\left| \begin{array}{l} G = SO(3), \dim G = 3 \\ T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \\ T^2, T^3 \text{ similares} \end{array} \right. \quad e^{i\alpha_1 T^1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}$$

invariancia $\Rightarrow V(\phi'_i) = V(\phi_i + i\alpha_a T^a_{ij} \phi_j) = V(\phi_i)$

exp. de Taylor $\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \alpha_a T^a_{ij} \phi_j = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \phi_i} T^a_{ij} \phi_j = 0$ α_a arbitrarios

derivando respecto a ϕ_k : $\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \phi_i} T^a_{ij} \phi_j + \frac{\partial V}{\partial \phi_i} T^a_{ik} = 0$

evaluando en el mínimo, $\langle \phi_i \rangle = \bar{\phi}_i$

(*) $\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \phi_i} \Big|_{\bar{\phi}_i} T^a_{ij} \bar{\phi}_j = 0$ ya que $\frac{\partial V}{\partial \phi_i} \Big|_{\bar{\phi}_i} = 0$

matriz M^2_{ik} de masas

$$V(\phi_i) = V(\bar{\phi}_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \phi_i} \Big|_{\bar{\phi}_i} (\phi - \bar{\phi}_k)(\phi - \bar{\phi}_i) + \dots$$

$$M_{ki}^2 T_{ij}^a \bar{\phi}_j = 0 \quad (*)$$

G se rompe a un subgrupo H_{nr} nr : no roto

para los generadores de H_{nr} $T_{ij}^a \bar{\phi}_j = 0$ $(*)$ trivial

para los generadores de G que no están en H_{nr} , $T_{ij}^a \bar{\phi}_j \neq 0$

$(*) \Rightarrow$ autovectores de \mathbb{R}^2 con autovalor cero

de autovectores cero = # de bosones de Goldstone = $\dim G - \dim H_{nr}$

ejemplo $V = \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \dots + \phi_N^2) - \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \dots + \phi_N^2)^2$

$$G = O(N), \quad H_{nr} = O(N-1)$$

Ruptura con campo complejo

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi + \mu^2 \varphi^* \varphi - \lambda (\varphi^* \varphi)^4$$

invariante bajo $\varphi \rightarrow e^{i\alpha} \varphi$ $U(1)$

$$V = -\mu^2 \varphi^* \varphi + \lambda (\varphi^* \varphi)^4$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \varphi^* (-\mu^2 + 2\lambda \varphi^* \varphi), \quad \mu^2 > 0 \text{ mínimo en } |\varphi|^2 = \frac{v^2}{2}, \quad v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

$$\varphi = e^{i\xi/v} \left(\frac{\eta + v}{\sqrt{2}} \right), \quad \langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \eta \rangle = 0$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \frac{1}{2} (2\mu^2 \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{\lambda}{4} \eta^4) + \frac{\eta}{v} \left(1 + \frac{\eta}{2v} \right) \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi$$

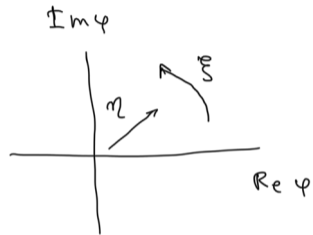
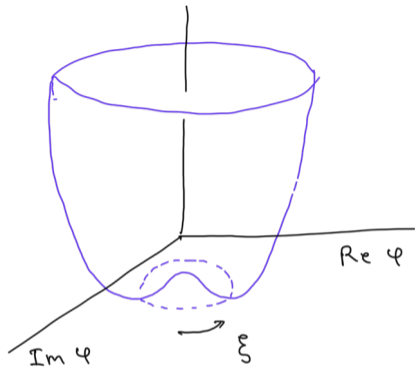
η masivo $m_\eta = \sqrt{2}\mu$, ξ bosón de Goldstone $m_\xi = 0$
acoplos con ∂_μ

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2)$$

$$\varphi^* \varphi = \frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2)$$

ejemplo $O(2)$

$$U(1) \simeq SO(2)$$



η masivo : dirección radial
 V varía, cuesta energía cambiar η

ξ masa nula : dirección circular
 V no varía, no cuesta energía cambiar ξ

TRANSFORMACIONES DE SIMETRÍA LOCALES

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi + \mu^2 \psi^* \psi - \lambda \psi^* \psi$$

simetría $U(1)$: $\psi' = e^{i\alpha} \psi \Rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L}$, $\mu^2 > 0 \Rightarrow$ ruptura espontánea
global α constante

si $\alpha = g\chi(x) \neq$ constante, $\mathcal{L}' \neq \mathcal{L}$

$$\partial_\mu \psi' = \partial_\mu (e^{ig\chi} \psi) = e^{ig\chi} (\partial_\mu \psi + ig \partial_\mu \chi) \neq e^{ig\chi} \partial_\mu \psi$$

Es necesario introducir un campo de calibre (gauge) $B_\mu(x)$

y reemplazar ∂_μ por $D_\mu = \partial_\mu + ig B_\mu$ derivada covariante
 g : constante de acoplamiento

EM: $g = e$, campo de calibre A_μ

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + i'g B_\mu \psi$$

$$\begin{aligned} (D_\mu \psi)' &= \partial_\mu \psi' + i'g B'_\mu \psi' = \partial_\mu (e^{i'g\chi} \psi) + i'g B'_\mu (e^{i'g\chi} \psi) \\ &= e^{i'g\chi} (\partial_\mu \psi + i'g \partial_\mu \chi + i'g B'_\mu) \end{aligned}$$

$$\text{se impone } (D_\mu \psi)' = e^{i'g\chi} D_\mu \psi \Rightarrow \partial_\mu \chi + B'_\mu = B_\mu$$

$$B'_\mu = B_\mu - \partial_\mu \chi$$

transformación de calibre del campo de calibre

EM

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\partial_0 \vec{A} - \vec{\nabla} A^0$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$$

$$A'^0 = A^0 - \partial_0 \chi$$

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$$

\Rightarrow

$$\vec{B}' = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = \vec{E}$$

Lagrangiano para el campo de calibre

se quiere \mathcal{L}_B invariante, i.e. $\mathcal{L}'_B = \mathcal{L}_B$, $B'_\mu = B_\mu - \partial_\mu \chi$

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad , \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad \text{tensor de campo}$$

$\frac{1}{2}(\partial_0 B^i)^2$

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \quad \Leftarrow \quad \partial_\mu \partial_\nu \chi = \partial_\nu \partial_\mu \chi$$

recordar: $\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

notar que un término de masa $\frac{1}{2} m_B^2 B_\mu B^\mu$ no es invariante de calibre

$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ describe un campo vectorial B_μ (espín 1)
de masa nula con dos grados de libertad
(dos polarizaciones)

Es posible

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_B^2 B_\mu B^\mu$$

pero no hay invariancia de calibre

\mathcal{L} describe un campo vectorial B_μ (espín 1)

masivo con 3 grados de libertad
(tres polarizaciones)

Ruptura espontánea de simetrías locales - Mecanismo Higgs

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_{\mu}\psi(D^{\mu}\psi)^{*} + m^2\psi^{*}\psi - \lambda(\psi^{*}\psi)^2$$

Próximamente ...



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongapysics



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.