1. Considere 3 campos escalares reales, ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3, con Lagrangiano dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi^T \partial^\mu \Phi - \frac{\lambda}{4}\left(\Phi^T\Phi - v^2\right)^2 , \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} ,$$

donde $\lambda > 0$ y $v > 0$ son constantes. La notación Φ^T significa transpuesto de Φ.

a) Demuestre que $\mathcal{L}$ es invariante bajo una transformación $SO(3)$ global, bajo la cual Φ transforma como un vector, i.e. $\Phi' = R\Phi$, donde R es una matriz real 3×3 que satisface $R^T R = \mathbb{1}$, $\det R = 1$, y tiene elementos de matriz constantes.

b) Determine los mínimos del potencial $V(\Phi) = \frac{\lambda}{4}\left(\Phi^T\Phi - v^2\right)^2$.

c) Rompa la simetría escogiendo

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} \langle\phi_1\rangle \\ \langle\phi_2\rangle \\ \langle\phi_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} .$$

Defina campos $\pi_1 = \phi_1 - \langle\phi_1\rangle$, $\pi_2 = \phi_2 - \langle\phi_2\rangle$, y $\sigma = \phi_3 - \langle\phi_3\rangle$. Reescriba el Lagrangiano en términos de los campos π_1, π_2 y σ. Demuestre que el Lagrangiano describe 2 bosones de Goldstone, i.e. 2 campos escalares reales de masa nula, y un campo escalar real masivo. Determine la masa del campo masivo.

d) Demuestre que el número de bosones de Goldstone es igual al número de generadores del grupo de simetría $SO(3)$ rotos, i.e. que no dan cero actuando sobre $\langle\Phi\rangle$.

`Ayuda:` Los generadores de $SO(3)$ en la representación vectorial son

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Fecha límite de entrega: 21-03-2023