# Cosmología del Big-Bang

Junio, 2021

## 1 The Big-Bang Cosmology

La teoría del big bang describe la evolución del universo a gan escala.

La teoría del big bang hoy día es aceptada porque ofrece una imagen exacta de cómo ha evolucionado el universo desde tiempos tan tempranos como 1 segundo después del principio hasta llegar al presente. Sin embargo, ésta teoría enfrenta serios problemas los cuales condujeron a la teoría del universo inflacionario.

La teoría del universo inflacionario tiene su origen en la teoría del big bang y hace aportaciones a ella pero no la sustituye. Esta teoría trata sobre lo que paso en el universo en una pequeñísima fracción de 1 segundo. Su característica fundamental es que describe un breve período de expansión muy rápido, durante el cual el universo se expandió en un factor de $10^{43}$ y quizás mucho más. Una vez que la inflación termina la evolución del universo se sigue por la teoría del big bang tradicional.

La teoría del big bang ha sido sometida a prueba a partir de tiempos tan tempranos como un segundo después del principio hasta el presente. Esta teoría se sustenta en firmes evidencias observacionales tales como:

- La expansión del universo observada por Hubble en 1929. Hubble observó que, salvo algunas excepciones, todas las galaxias se alejan de nosotros y la velocidad $v$ con la que cada galaxia se aleja es proporcional a la distancia $d$ a la que ésta se encuentra. Dicha relación puede ser escrita de la forma $v = Hd$, siendo $H$ el parámetro de Hubble. El valor del parámetro de Hubble hoy día se conoce como la constante de Hubble y está definida por $H_0 = 100\, h\, \mathrm{Km\, s^{-1}\, Mpc^{-1}}$, donde $h$ es un parámetro adimensional. Medidas actuales provenientes del WMAP indican que $h = 0.73^{+0.03}_{-0.04}$. La ley de Hubble ha sido confirmada observacionalmente por una gran cantidad de datos hasta distancias de centenares de megaparsecs.

- La existencia de la radiación cósmica de fondo (CMB) predicha en 1946 por Gamow *et al.* y detectada en 1964 por Penzias y Wilson. La CMB posee un espectro de cuerpo negro a temperatura $2.73K$. La característica más resaltante de la CMB es su alto grado de uniformidad, con inhomogeneidades de una parte en $10^5$.

- Un elemento esencial del modelo del big bang es la nucleosíntesis primordial, teoría que predice la abundancia de los isótopos de los elementos ligeros D, $^3$He,

$^4$He y $^7$Li. La nucleosíntesis ocurrió cuando la temperatura del universo era del orden de 1 MeV [1].

# 2 Bases teóricas

## 2.1 La métrica de Friedmann-Robertson-Walker

La teoría del big bang está basada en el principio cosmológico el cual establece que el universo es homogéneo e isótropo a gran escala. Homogeneidad significa que el universo tiene exactamente el mismo aspecto desde cualquier punto del espacio, e isotropía, por su parte, significa que si se está en un punto cualquiera del espacio el modelo del universo tiene exactamente el mismo aspecto en todas las direcciones. La evidencia del principio cosmológico se encuentra en las observaciones de la radiación cósmica de fondo, las cuales revelan que la anisotropía del universo es solamente de una parte en $10^5$.

### 2.1.1 Homogeneidad

Decir que el universo es *homogéneo* significa que no hay ubicaciones preferidas en el universo; se ve igual sin importar dónde coloque su telescopio.

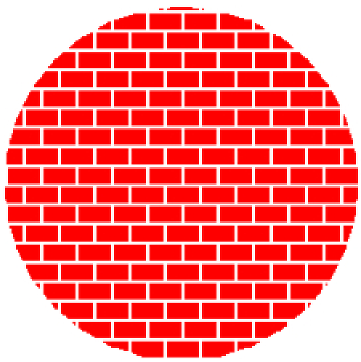

Figure 1: Homogeneous pattern.

### 2.1.2 Isotropía

Decir que el universo es *isotrópico* significa que no hay direcciones preferidas en el universo; se ve igual sin importar hacia dónde apunte su telescopio.

[1] 1 eV = 11604.5K

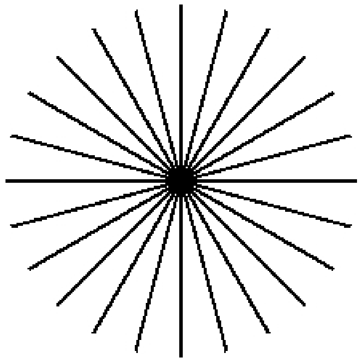

Figure 2: Isotropic pattern.

### 2.1.3 Homogeneidad e Isotropía

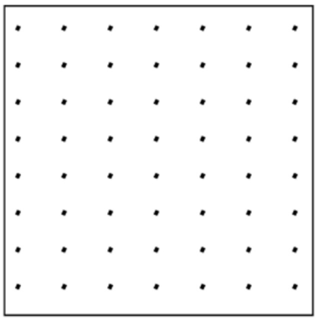

Figure 3: Homogeneous and isotropic pattern.

La métrica más general que satisface homogeneidad e isotropía es la de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-Kr^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)\right], \tag{1}$$

donde $(t, r, \theta, \phi)$ son las coordenadas comóviles que se mantienen fijas para los objetos que sólo tienen el movimiento debido a la expansión del universo. La constante $K$ tiene una interpretación geométrica, ésta caracteriza la curvatura espacial del universo y puede valer $+1$, 0 ó $-1$, según el universo sea espacialmente cerrado, plano o abierto. El parámetro adimensional $a(t)$ es el factor de escala y describe la expansión del universo que está caracterizada por el parámetro de Hubble

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \tag{2}$$

En particular, en un universo homogéneo e isótropo, todas las escalas de longitud crecen por el mismo factor $a(t)$, por lo tanto, las distancias radiales (físicas) están dadas por

$$R = a(t) \int_0^r \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \tag{3}$$

Si se considera explícitamente la velocidad de la luz $c$, se pueden definir dos escalas características: el tiempo de Hubble $H^{-1}$ y la distancia de Hubble $cH^{-1}$. El tiempo de Hubble es un aproximado a la edad actual del universo, mientras que la distancia de Hubble, también conocida como el horizonte de Hubble, provee un estimado de la distancia que la luz puede viajar mientras el universo se expande. El tiempo y el horizonte de Hubble actuales son

$$H_0^{-1} = 9.7\,8h^{-1}\,\mathrm{Gyr},$$

$$cH_0^{-1} = 2998\,h^{-1}\,\mathrm{Mpc}.$$

La ley de Hubble $v = H_0\, d$ es una aproximación para distancias no muy lejanas de una versión más general

$$H_0\, d = z + \frac{1}{2}\left(1 - q_0\right) z^2 + \mathcal{O}\left(z^3\right), \tag{4}$$

donde el parámetro $z$ recibe el nombre de redshift (corrimiento hacia el rojo) y se define como la proporción entre la longitud de onda de los fotones que llegan de objetos lejanos $\lambda_0$ y la longitud de onda de éstos cuando fueron emitidos $\lambda$

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_0}{\lambda}, \tag{5}$$

que coincide con la relación entre los valores del factor de escala en el presente $a_0 = 1$ y el factor de escala cuando la luz fue emitida $a$. El parámetro de desaceleración $q_0$ está relacionado con la aceleración de la expansión y se define como

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a_0}\frac{1}{H_0^2}. \tag{6}$$

## 2.2 Dinámica del universo

Para conocer la evolución dinámica del universo se deben resolver las ecuaciones de Einstein que están dadas por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = 8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \tag{7}$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein; $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, el cual depende de la métrica y sus derivadas; $\mathcal{R}$, el escalar de Ricci es la contracción del tensor de Ricci, $\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$; $G$ es la constante de Newton y $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento que describe el contenido del universo. El término $\Lambda g_{\mu\nu}$ fue introducido originalmente por Einstein por razones cosmológicas, por eso $\Lambda$ es llamada la constante cosmológica.

La hipótesis de homogeneidad e isotropía implica que $T_{\mu\nu}$ debe tomar la forma de un fluido perfecto caracterizado por una densidad $\rho(t)$ y una presión $p(t)$. La forma del tensor energía-momento para un modelo isótropo y homogéneo viene dada por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \tag{8}$$

donde $u = (1, 0, 0, 0)$ es el cuadrivector velocidad en coordenadas comóviles.

Las ecuaciones de movimiento del fluido perfecto se pueden deducir de las ecuaciones de Einstein (7) usando la métrica de FRW (1) y el tensor energía-momento (8). A partir de la componente $\mu = \nu = i$, se obtiene la ecuación de la aceleración independiente de $K$ (ver próxima clase)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \tag{9}$$

Si la densidad de energía consiste sólo de materia, se puede elegir un valor de $\Lambda$ tal que $\dot{a} = \ddot{a} = 0$, es decir, se tiene un universo estático, lo cual fue la motivación original de Einstein para introducir la constante cosmológica. Cuando Hubble midió la expansión del universo, Einstein tuvo que reconocer su error y admitir que no era necesario introducir la constante $\Lambda$ en las ecuaciones (7). Sin embargo, gracias a medidas recientes de supernovas muy lejanas, se ha determinado el valor de esta constante y no sólo se ha encontrado que $\Lambda \neq 0$, sino que también se ha llegado a la conclusión de que actualmente el universo se encuentra en una etapa de expansión acelerada, es decir, que $\ddot{a} > 0$.

A partir de la componente $\mu = \nu = 0$, se encuentra la ecuación de Friedmann (ver próxima clase)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \tag{10}$$

La ecuación (10) es importante porque relaciona la dinámica del factor de escala con el contenido del universo y su forma se puede simplificar si se incluye la contribución $\rho_\Lambda = -p_\Lambda = \Lambda/8\pi G$ correspondiente a la constante cosmológica. Con dicha modificación la ecuación de Friedmann (10) se puede escribir como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{\rm tot} - \frac{K}{a^2}, \tag{11}$$

donde $\rho_{\rm tot} = \sum \rho_i$ representa a cualquier tipo de energía que constituye al universo: materia, radiación, vacío o de otro tipo.

La ecuación de Friedmann (11) se puede utilizar para definir la densidad crítica

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \tag{12}$$

tal que la geometría del universo sea espacialmente plana ($K = 0$). Se puede definir el parámetro de densidad como el cociente de la densidad de energía total del universo $\rho$ y la densidad crítica $\rho_c$ que haría el universo espacialmente plano

$$\Omega_{\rm tot} \equiv \frac{\rho_{\rm tot}}{\rho_c}. \tag{13}$$

Usando la ec. (13) la ecuación de Friedmann (11) queda como

$$\Omega_{\rm tot} - 1 = \frac{K}{a^2H^2}. \tag{14}$$

La ecuación de Friedmann escrita de la forma (14) permite relacionar la cantidad de energía total en el universo con su geometría, ver fig. 4:

$$\begin{array}{lcccl}
\Omega_{\rm tot} > 1 & \rightarrow & K = +1 & \rightarrow & \text{Universo espacialmente cerrado,} \\
\Omega_{\rm tot} < 1 & \rightarrow & K = -1 & \rightarrow & \text{Universo espacialmente abierto,} \\
\Omega_{\rm tot} = 1 & \rightarrow & K = 0 & \rightarrow & \text{Universo espacialmente plano.}
\end{array}$$

Se puede obtener más información del factor de escala imponiendo la conservación del tensor energía-momento, $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$. A partir de la ec. (8) con $\mu = 0$, se llega a la ecuación de continuidad

$$\dot\rho + 3H(\rho + p) = 0, \tag{15}$$

que se puede escribir como

$$a\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}a} = -3(\rho + p). \tag{16}$$

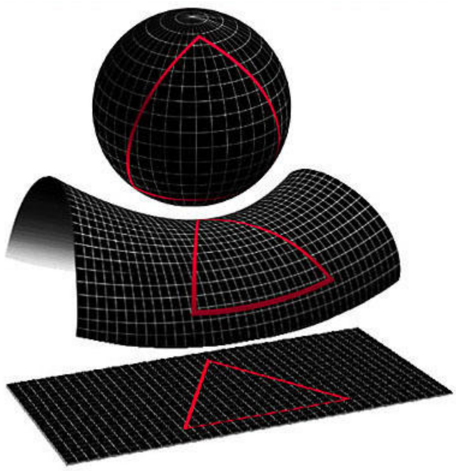

Figure 4: Posibles geometrías del universo.

La ecuación (16) se puede derivar a partir de la primera ley de la termodinámica para una expansión adiabática, $\mathrm{d}E = -p\,\mathrm{d}V$, donde $E = \rho V$ es la energía en un volumen comóvil $V \propto a^3$.

La densidad de energía $\rho$ y la presión $p$ están relacionados a través de la ecuación $\rho = wp$, la cual da $p$ como función de $\rho$. Algunos casos importantes son

$$p = \frac{\rho}{3}, \quad \text{radiación,} \tag{17}$$

$$p = 0, \quad \text{materia no relativista,} \tag{18}$$

$$p = -\rho, \quad \text{constante cosmológica.} \tag{19}$$

La historia del universo en el modelo del big bang se puede describir fácilmente considerando que la densidad de energía total viene dada por $\rho_{\mathrm{tot}} = \rho$, donde $\rho$ representa el caso de materia, radiación o vacío. A continuación se muestran las soluciones de la ecuación de Friedmann (11) considerando $K = 0$ y de la ecuación de continuidad (15) para las ecuaciones de estado (17)-(19)

$$\text{Radiación:} \quad p = \frac{\rho}{3} \quad \rightarrow \quad \rho \propto a^{-4}, \quad a(t) \propto t^{1/2} \tag{20}$$

$$\text{Materia:} \quad p = 0 \quad \rightarrow \quad \rho \propto a^{-3}, \quad a(t) \propto t^{2/3} \tag{21}$$

$$\text{Vacío:} \quad p = -\rho \quad \rightarrow \quad \rho \propto \rho_0, \quad a(t) \propto \exp(Ht). \tag{22}$$

En los casos de radiación y materia la densidad de energía disminuye como $t^{-2}$ y la expansión es desacelerada $\ddot{a} < 0$, mientras que, en el vacío o en el caso de la constante cosmológica la densidad de energía permanece constante y la expansión es acelerada $\ddot{a} > 0$.

# 3 NED

Today's astronomy and astrophysics students are so steeped in the various aspects of the structure of the universe that the Hubble relationship is often taken for granted. But it is the most fundamental aspect of the universe at large, and because we have the computational power to investigate statistical questions in some depth we will explore them here.

To explore the fit of observational data we have merged two very important lists of galaxy properties into a single edited list, known as NED-1D and NED-4D

Because it is the distance determinations to these objects that is the most uncertain part of any study, we will use the estimated distance variances to weight our least-squares solutions, with $w = 1/\text{variance(Mpc)}$. In a number of cases no such variances are given, so we simply use the average variance for each original list, which is 0.2 Mpc for the nearby (NED-1D) list and 0.4 Mpc for the far (NED-4D) list. A graph of the combined measurements can be seen in figure 3.1.

As 3.1 shows, the galactic speeds saturate at the speed of light, exactly as expected for relativistic motion. It is therefore useful to convert the speeds back to a measure of their redshift before attempting to fit the data.

The expression for the relativistic Doppler effect for a light emitting object is,

$$\nu_{\text{obs}} = \frac{\sqrt{c-v}}{\sqrt{c+v}}\nu_{\text{e}}, \tag{23}$$

where $\nu_{\text{obs}}$ is the observed frequency and $\nu_{\text{e}}$ the frequency emitted at the source. For optical astronomy, wavelength is preferred; thus

$$\lambda_{\text{obs}} = \frac{\sqrt{c+v}}{\sqrt{c-v}}\lambda_{\text{rest}}, \tag{24}$$

where $\lambda_{\text{rest}}$ is the wavelength emitted at 0 relative velocity.

This redshift is typically expressed in terms of a value $z$, which is the ratio of the wavelength difference to the rest wavelength,

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{rest}}}{\lambda_{\text{rest}}} = \frac{\sqrt{c+v}}{\sqrt{c-v}} - 1. \tag{25}$$

Unlike observed speed, the $z$ redshift has (in principle) no upper limit, which makes it more suitable for data fitting.

## 3.1 Fitting the NED data

The scatter of the galactic measurements is considerable. The data fits can be made by a wighted quadratic fit with zero constant term.

Our fit function can be expressed as:

$$z(d) = 0.000249d + 8.194 \times 10^{-9} d^2. \tag{26}$$

In standard units:

$$H_0 = 74.52 \quad {}^{\mathrm{km}}\!/\!_{\mathrm{s}}/\mathrm{Mpc}$$

.