

Atenuación Exponencial, Haces Angostos y Problema de Transporte

Rafael Martín-Landrove
Escuela de Física

Univesidad Central de Venezuela



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

UAN
UNIVERSIDAD
ANTONIO NARIÑO





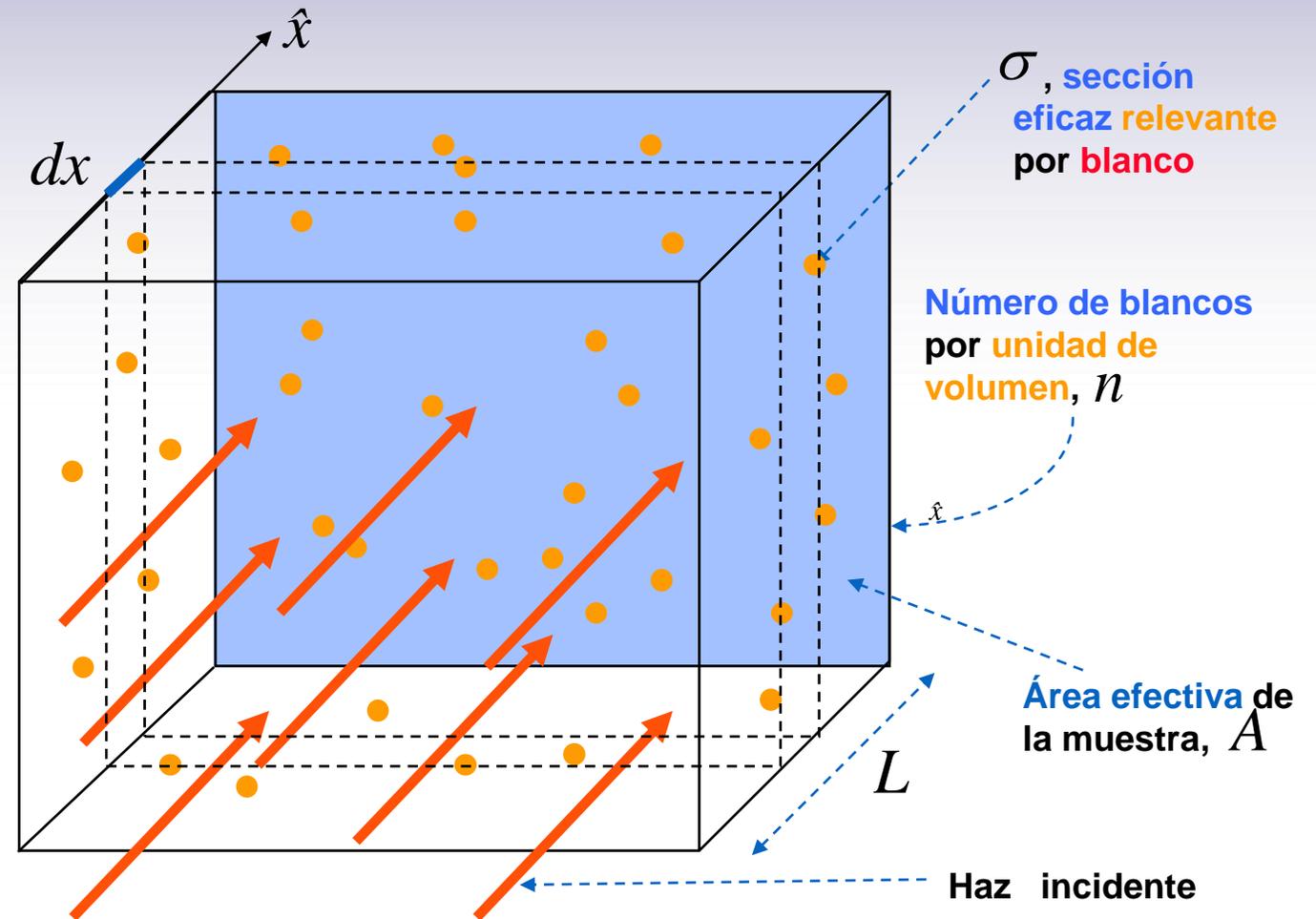
Atenuación Exponencial Simple

Suposiciones básicas:

- (1) Incidencia normal de partículas neutras.
- (2) Hay absorción total ó continua en la misma dirección.
- (3) No se generan partículas secundarias.

Fracción de pérdida por absorción:

$$\frac{dN(x)}{N(x)} = -\frac{\sigma n A dx}{A} = -n\sigma dx = -\mu dx$$



$N(x)$, número de partículas a una profundidad



Atenuación Exponencial Simple

Integrando se obtiene:

$$N(x) = N_0 e^{-\mu x} \quad [N_0 \equiv N(x=0)]$$

“Ley de Atenuación Exponencial” (situación ideal)

μ → Coeficiente de atenuación lineal

$\frac{\mu}{\rho}$ → Coeficiente de atenuación másico

$\frac{1}{\mu}$ → Representa el camino libre medio:

• La distribución relevante es $P(x) \propto e^{-\mu x}$

• Normalizada: $P(x) = \mu e^{-\mu x}$

• Valor esperado de x : $\langle x \rangle = \int_0^{\infty} x dx e^{-\mu x} / \int_0^{\infty} dx e^{-\mu x} = \frac{1}{\mu}$



Atenuación Exponencial para Varios Modos de Absorción

Como antes tenemos las suposiciones básicas:

- (1) Incidencia normal de partículas neutras.
- (2) Hay absorción total ó continua en la misma dirección.
- (3) No se generan partículas secundarias ó dispersadas.

Puede haber más de un proceso:

- Al evaluar la fracción de pérdida por absorción, notamos que hay k procesos a considerar:

$\sigma_i \longrightarrow$ Sección eficaz asociada al i -ésimo proceso
 $\mu_i = n\sigma_i$

$$\begin{aligned}\frac{dN(x)}{N(x)} &= -n\sigma_1 dx - n\sigma_2 dx - n\sigma_3 dx - \dots - n\sigma_k dx \\ &= -\mu_1 dx - \mu_2 dx - \mu_3 dx - \dots - \mu_k dx\end{aligned}$$

$$N(x) = N_0 e^{-(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k)x}$$

$$\mu_T \equiv \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_k = \sum_{i=1}^k \mu_i$$



¿Qué representa la fracción μ_i/μ_T ?

- Dada una profundidad x dentro del material, es la probabilidad de que tenga lugar el i -ésimo proceso a esa profundidad.
- La fracción μ_i/μ_T es importante en simulaciones de Monte Carlo cuando hay competencia de procesos. En general μ_T y los μ_i 's pueden depender de la profundidad x . ¿Cómo se modifica lo anterior?

(1) Para un solo proceso (No hay competencia)

$$\frac{dN(x)}{N(x)} = -\mu(x) dx \rightarrow N(x) = N_0 e^{-\int_0^x \mu(x') dx'}$$

¿En qué situación física real puede tener lugar esto? Como $\mu_i = n_i \sigma_i$, σ_i depende de la energía, pero la densidad n_i puede depender de x (para tejidos biológicos este puede ser efectivamente el caso).



(2) ¿Qué pasa cuando compiten varios procesos?

Tenemos una superposición:

$$\frac{dN(x)}{N(x)} = -\mu_1(x) dx - \mu_2(x) dx - \mu_3(x) dx - \dots - \mu_k(x) dx$$

que al integrar resulta: $N(x) = N_0 e^{-\sum_{i=1}^k \int_0^x dx' \mu_i(x')}$

Si suponemos de nuevo la independencia con x :

Número total de interacciones entre 0 y x :

$$\Delta N(x) = N_0 - N(x) = N_0 \left(1 - e^{-\sum_i \mu_i x} \right) = N_0 \left(1 - e^{-\mu_T x} \right)$$

¿Qué número de interacciones hay para procesos del tipo i ?

$$\Delta N_i(x) = N_0 \left(1 - e^{-\mu_T x} \right) \frac{\mu_i}{\mu_T}$$



Atenuación de Haz Angosto

El proceso ó procesos descritos anteriormente corresponden a un haz angosto y describen solamente una parte de la realidad.

Suposiciones fundamentales: (1) Solamente hay absorción. (2) No hay radiación secundaria, no hay dispersión de la radiación primaria (elástica e inelástica).

Notamos que como radiación secundaria podemos incluir partículas neutras. Resultado:

- **El número de partículas que emerge de la placa tiene que ser mayor.**
- **Lo desarrollado anteriormente aunque es muy sencillo, no es rigurosamente válido.**



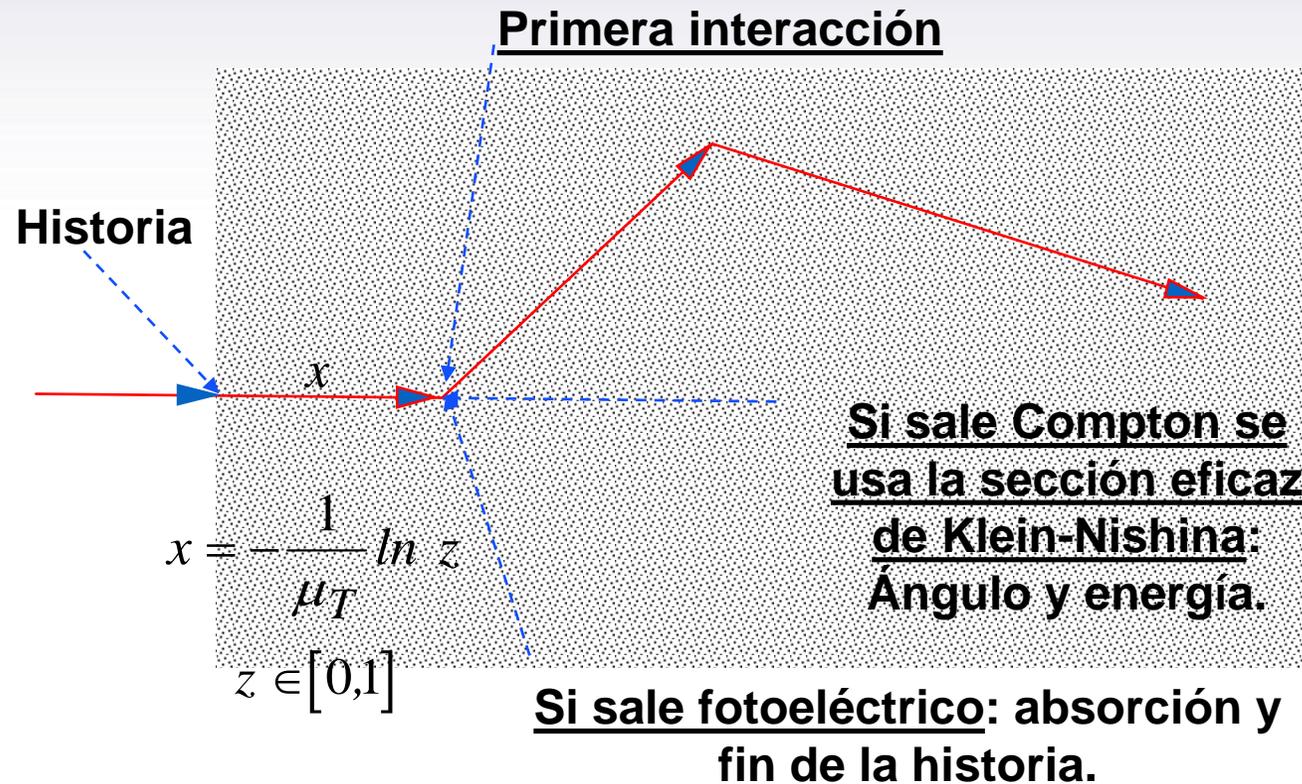
¿Cómo podemos tratar de mejorarlo?

- **Primero:** La radiación secundaria cargada que se produce, podemos considerar que no sale del material y es absorbida (su carga es responsable de ello).
- **Segundo:** Si la radiación cargada secundaria llega a escapar, el detector siempre se puede “blindar” en forma apropiada.
- **Tercero:** La energía de interés en el problema puede limitar procesos.
- **Ejemplo:** Rayos-X con energía (al incidir) que está por debajo del umbral para la formación de pares (**1.022 MeV**).



Problema de Transporte Planteado

Va a ser realmente **complejo** si se abandona la simplicidad de la geometría con la que iniciamos la discusión. **Suponemos: Fotones (rayos-X)** incidiendo normalmente en la interfaz plana.



Hay: Efecto fotoeléctrico (absorción total) y **Compton** (dispersión inelástica). **No hay: Formación de pares**, si la energía del fotón es menor que **1.022 MeV** y fotones secundarios.

Base para simulación con Monte Carlo

$$\mu_T = \mu_{\text{fotoelectrico}} + \mu_{\text{compton}} \longrightarrow \text{Tabulados}$$

$$P_{\text{fotoelectrico}} = \mu_{\text{fotoelectrico}} / \mu_T \qquad P_{\text{compton}} = \mu_{\text{compton}} / \mu_T$$

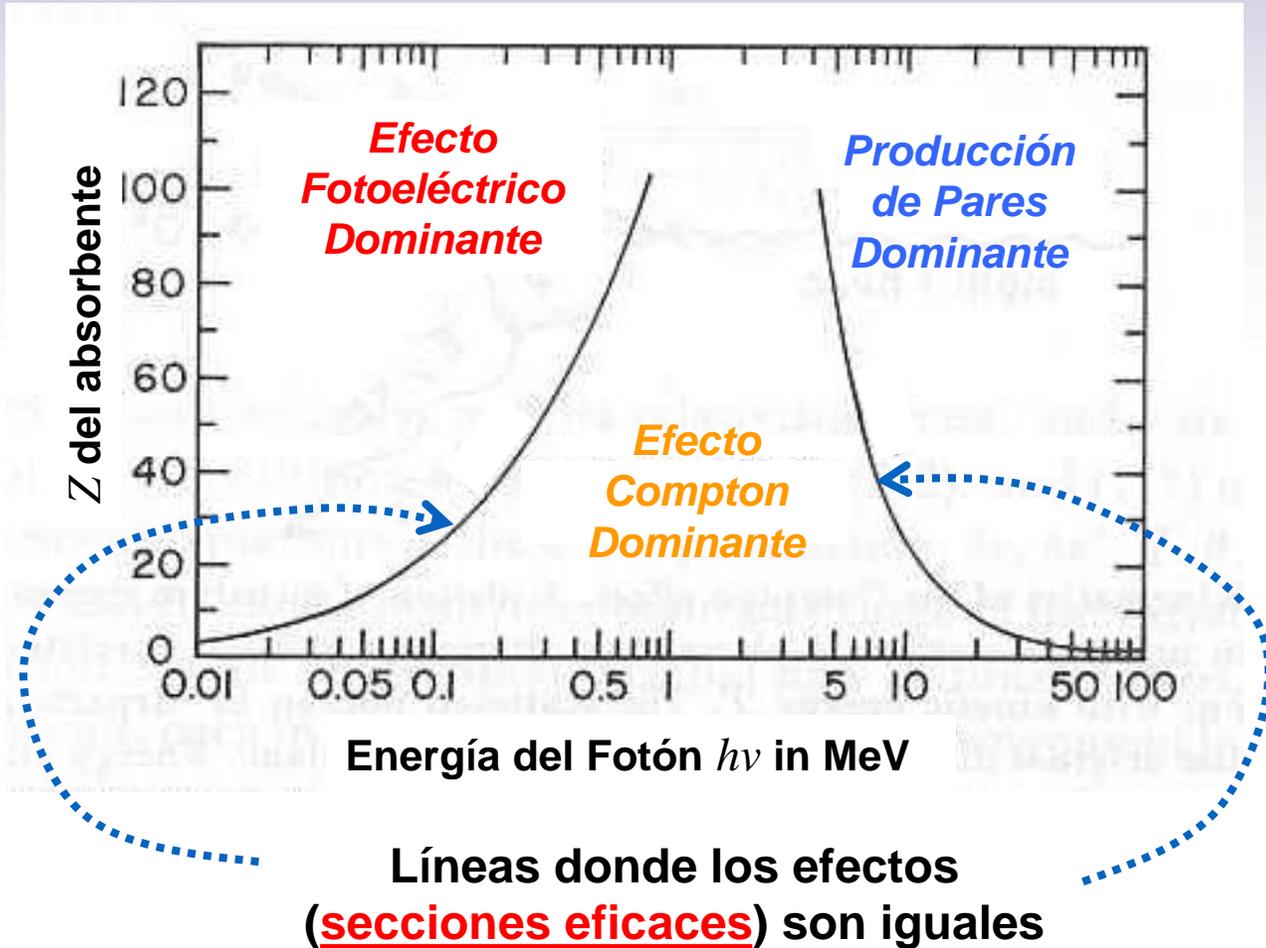


Interacciones de Rayos-X y Gamma en la Materia

- Hay cinco tipos de interacciones de rayos-X y gamma en la materia que tienen relevancia en física radiológica:
- **Efecto Compton** (dispersión inelástica de un electrón por un fotón)
- **Dispersión Rayleigh** (dispersión elástica de un electrón por un fotón)
- **Efecto Fotoeléctrico** (absorción de un fotón por un electrón ligado con eyección del electrón)
- **Producción de Pares** (formación de un par electrón-positrón cuando un fotón con suficiente energía pasa cerca de un núcleo atómico)
- **Interacciones fotonucleares** (un fotón interactúa con el núcleo con eyección de diferentes clases de fragmentos)



Interacciones de Rayos-X y Gamma en la Materia



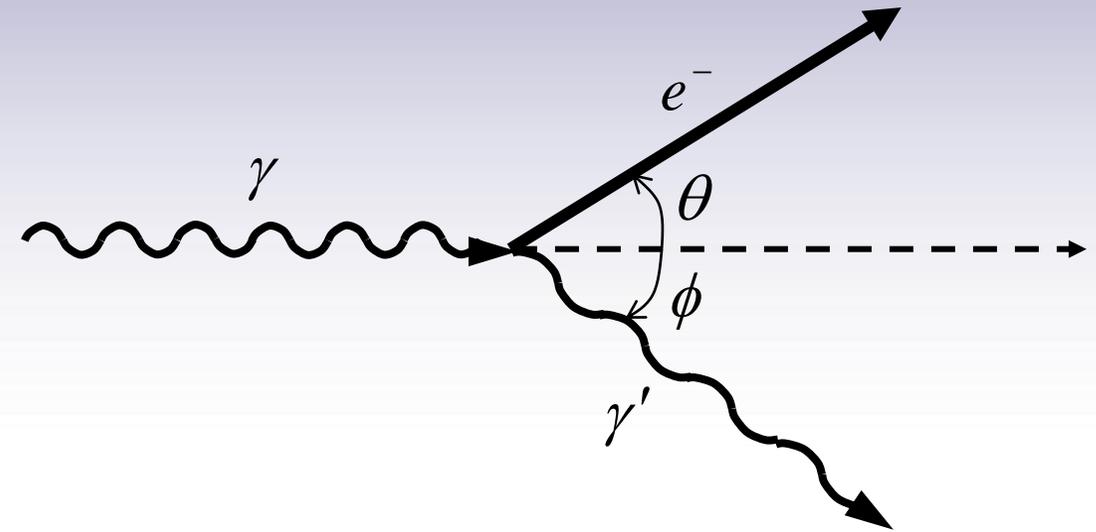
- Notamos que para bajo Z (situación dominante en tejido vivo) el **efecto Compton** es dominante para prácticamente todo el rango de uso clínico.
- Para alto Z el **efecto Compton** va perdiendo importancia (material de los equipos y blindaje) a favor del **efecto fotoeléctrico** y la **formación de pares**.



Determinación de $\mu_{Compton}$: Cinemática del Efecto Compton

- Para tratar la **colisión de un fotón con un electrón** vamos a suponer que el electrón:
 - **No está ligado.**
 - **Está en reposo.**
 - Esta aproximación es válida si trabajamos a altas energías.
 - Después de la colisión la **energía cinética T** con la que sale el electrón es

$$T = h\nu - h\nu'$$



- Conservación de la cantidad de movimiento a lo largo del eje paralelo a la dirección de incidencia proporciona

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \phi + p \cos \theta$$

momentum del electrón



Cinemática del Efecto Compton

- Conservación de la cantidad de movimiento a lo largo del eje perpendicular a la dirección de incidencia nos lleva a

$$\frac{h\nu'}{c} \sin \phi = p \sin \theta$$

- En resumen tenemos

$$h\nu' \cos \phi + pc \cos \theta = h\nu$$

$$h\nu' \sin \phi - pc \sin \theta = 0$$

- También

$$\begin{aligned} pc &= \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} = \sqrt{(E_e - m_e c^2)(E_e + m_e c^2)} \\ &= \sqrt{T(T + 2m_e c^2)} \end{aligned}$$

- Empleando lo anterior podemos llegar a

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \phi)} \quad \cos \theta = \left(1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} \right) \tan \left(\frac{\phi}{2} \right)$$



¿En qué Régimen Vamos a Trabajar Realmente?

- Notemos que el régimen a considerar es realmente **relativista**, así para electrones con energía cinética $T = 4 \text{ MeV}$ tenemos que su energía total es

$$E = T + m_e c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}$$

A partir de esto podemos escribir

$$pc = \sqrt{T(T + 2m_e c^2)}$$

y entonces

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{pc}{E} = \frac{\sqrt{T(T + 2m_e c^2)}}{T + m_e c^2} = \frac{\sqrt{1 + 2\xi}}{1 + \xi} = 0.99356\dots$$

$$\xi \equiv \frac{m_e c^2}{T} = 0.12775\dots$$

Aún para 500 keV tenemos $\beta = 0.86286\dots$ y para 50 keV resulta $\beta = 0.41268\dots$



Obtención de los Coeficientes Másicos

- Consideremos la sección eficaz diferencial de Klein-Nishina dada por

$$\frac{d_c \sigma}{d\Omega_\gamma} = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{h\nu'}{h\nu} \right)^2 \left(\frac{h\nu}{h\nu'} + \frac{h\nu'}{h\nu} - \sin^2 \theta_\gamma \right)$$

- Teniendo presente

$$\frac{h\nu'}{h\nu} = \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos\theta_\gamma)} \quad \alpha \equiv \frac{h\nu}{m_e c^2} \quad \alpha_{FS} \equiv \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.08}$$

- La sección eficaz total se puede calcular como

$${}_c \sigma_T = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta_\gamma d\theta_\gamma \frac{d_c \sigma}{d\Omega_\gamma}$$

$$\chi_\gamma \equiv \cos \theta_\gamma$$



Obtención de los Coeficientes Másicos

Con el resultado

$$\begin{aligned}
{}_c\sigma_T &= \frac{\pi r_0^2}{\alpha} \left\{ \ln(1+2\alpha) + \frac{1}{1+2\alpha} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+2\alpha)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2(1+\alpha)^2}{\alpha(1+2\alpha)} - \frac{2(1+\alpha)}{\alpha^2} \ln(1+2\alpha) + \frac{2}{\alpha} \right\} \\
&= 2\pi r_0^2 \left\{ \frac{1+\alpha}{\alpha^2} \left[\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha} - \frac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\ln(1+2\alpha)}{2\alpha} + \frac{(1+2\alpha)^2 - \alpha^3}{\alpha^2(1+2\alpha)^2} \right\}
\end{aligned}$$

- Notamos su independencia en Z (resultado de la aproximación asociada a electrón no ligado).

- El coeficiente de atenuación másico debido al efecto Compton viene dado por

$$\frac{\mu_C}{\rho} = \frac{n_{\text{electrónica}}}{\rho} {}_c\sigma_T = Z \frac{n_{\text{atómica}}}{\rho} {}_c\sigma_T = Z \frac{N_A}{w_A} {}_c\sigma_T \quad \frac{n_{\text{atómica}}}{\rho} \rightarrow \frac{N_A}{w_A}$$

densidad electrónica densidad atómica peso atómico

$$\frac{\mu_C}{\rho} = \frac{Z}{w_A} N_A {}_c\sigma_T \quad \text{número de Avogadro}$$



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongaphysics



Latin American alliance for
Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

UAN
UNIVERSIDAD
ANTONIO NARIÑO



