Buenos días!

Curso: Dinámica de Fenómenos Críticos

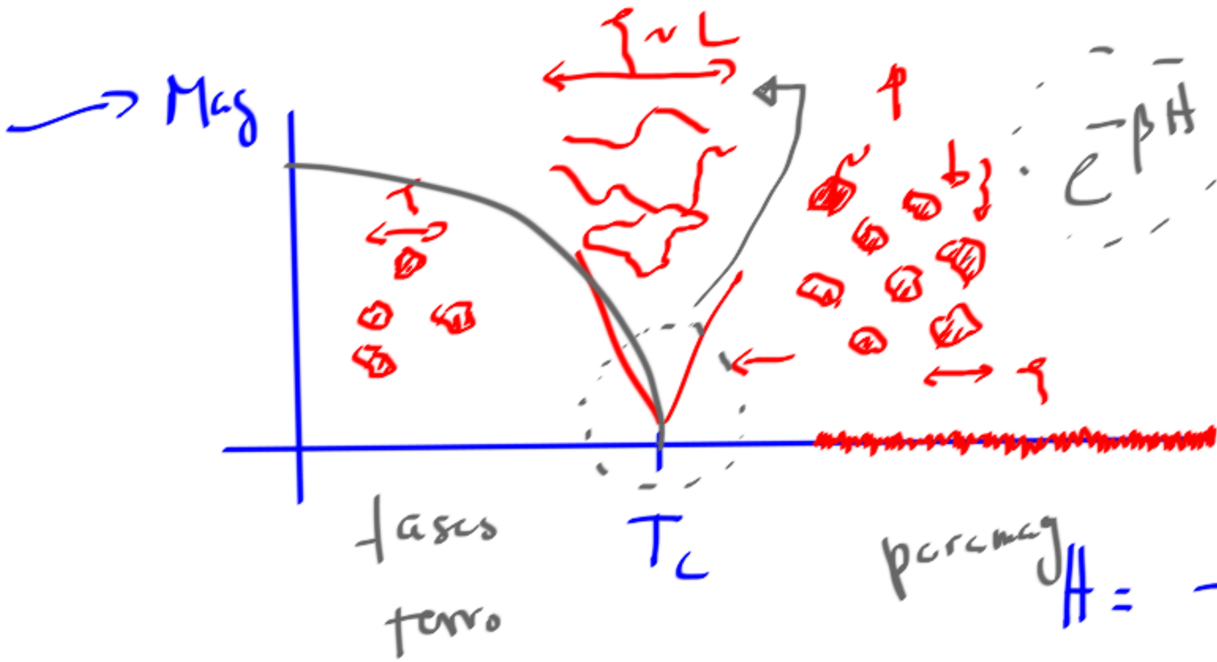
Semestre 2 La CoNGA

Ernesto Medina

Critical slowing down

alentamiento crítico

escalas espaciales
escalas temporales



$e^{-\beta H}$

$J : k_B T$

$\mu \sim k_B T$

$H = -\sum J S_i S_j$

vecinos y sitios

Equilibrio: Ergodicidad

en los tiempos exp

existe tiempo para explorar los edos accesibles

$\tau_{rel} \ll t_{exp}$

suposición

evolucion temporal $\iff$ estadistica

estática $\iff$ estadistica

Cerca de criticalidad

τ_{rel} no está asociado a relajación microscópica del sistema

$\tau_{relajación} \propto L^{z}$

dinámica crítica $\Rightarrow$ sino con la relajación de fluctuaciones largo alcance

$\underbrace{\text{fluctuaciones largo alcance}}_{\text{parámetro de orden}}$

$\underbrace{\text{parámetro de orden}}_{\text{cerca del punto crítico}}$

Leyes de conservación y su efecto sobre los tiempos de relajación

interfiere con los mecanismos de relajación del parámetro de orden

Clases de Universalidad: (exponentes críticos)

ESTÁTICAS

- dimensionalidad
- simetrías
- Naturaleza del parámetro de orden
- desorden

ESTÁTICA $\Rightarrow$ $H(r,s,t)$ $\leftarrow$

y

escalamiento de parámetros del Hamiltoniano

DINÁMICO $\Rightarrow$ Ecuación de Movimiento

Hamiltonianas y no

Hamiltonianas

Pero que ecuaciones de Movimiento?

Partimos de una ec. de mov. que contiene irreversibilidad

- Grano grueso (Coarse grained)
- irreversible ⇒ Teoría cinética de mov. Browniano

1) Movimiento regular → determinista → Fricción
2) " aleatorio → ruido

tasas de relajación + ruido

Movimiento Browniano de oscilador armónico

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$$

modos del sistema

$q_1 = p \qquad q_2 = x$

elipse

$$H = \frac{q_1^2}{2m} + \frac{1}{2} k q_2^2 = \frac{q_1^2}{2m} + \frac{q_2^2}{2/k}$$

Espacio q_1, q_2 espacio de fases

$$\dot{q}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} \qquad \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial q_1}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

Ecuación cinética fenomenológica:

determinismo, fricción, forzado aleatorio

$V_1 = \dot{q}_1$

$V_2 = \dot{q}_2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial t} = V_1 - \dfrac{T_1}{T}\dfrac{\partial H}{\partial q_1} + \xi_1(t) \\ \dfrac{\partial q_2}{\partial t} = V_2 \end{cases}$$

μ

en términos de p y x

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \underbrace{-Kx}_{\text{resorte}} - \overbrace{\frac{\Gamma_1}{T}\frac{p}{m}}^{\text{fricción}} + \xi$$

$\xi \rightsquigarrow$ forzamiento

$T \rightsquigarrow$ temperatura

ecuación de Langevin

$k_B T$

ξ distribuida de forma Gaussiana

$$P(\xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4D_1}}}{\sqrt{4D_1}}$$

$$\langle \xi_1(t) \rangle = 0$$

$$\langle \xi_1(t)\,\xi_1(t') \rangle = 2D_1\,\delta(t-t')$$

$$P(q_1, q_2, t)\, dq_1\, dq_2$$

$\Rightarrow$ FOKKER - PLANCK

$$\left\langle \frac{\partial q_1}{\partial t} \right\rangle = \langle v_1 \rangle - \frac{\Gamma_1}{T} \frac{\langle q_1 \rangle}{m} + \cancel{\langle \xi_1 \rangle}$$

$$\left\langle \frac{\partial q_1}{\partial t} \right\rangle = -K \langle q_2 \rangle - \frac{\Gamma_1}{T} \frac{\langle q_1 \rangle}{m} + 0$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 q_1}{\partial t^2} \right\rangle = -K \frac{\partial \langle q_2 \rangle}{\partial t} - \frac{\Gamma_1}{mT} \frac{\partial \langle q_1 \rangle}{\partial T} =$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \langle q_1 \rangle}{\partial t^2} + \frac{\Gamma_1}{mT} \frac{\partial \langle q_2 \rangle}{\partial t} + \frac{K}{m} \langle q_1 \rangle = 0$$

$$\langle q_1 \rangle = C\, e^{-\alpha t}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha^2 - \frac{\Gamma_1}{mT}\alpha + \frac{K}{m} = 0$$

$$\frac{1}{\tau} = \alpha = \frac{\frac{\Gamma_1}{mT} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma_1}{mT}\right)^2 - 4\,K/m}}{2}$$

tiempo característico

$$\langle q_1 \rangle = C\, e^{-\alpha t}$$

$$\frac{1}{\tau_1} = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad \frac{1}{\tau_2} = \frac{\Gamma_1}{mT}$$

reservorio

$\langle \xi_1 \rangle , \langle \xi_2 \rangle \to 0$ dompare el determinism

equilibrio con el reservorio

fluctuacion $\Rightarrow$ $\langle \xi_1^n \rangle , \langle \xi_2^n \rangle$

depende de $S(t)$

- Ecuacion de Fokker-Planck

Ec. de mov. de $P(\xi_1, \xi_2, t)$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi_1}{\partial t} &= V_1 - \frac{\Gamma_1}{T} \frac{\partial H}{\partial \xi_1} + S_1 \\
\frac{\partial \xi_2}{\partial t} &= V_2 \qquad\quad 0 \qquad\qquad 0
\end{aligned}\right\}
$$

Sentido común dicta $\qquad q_1, q_2$

$$\frac{\partial P(\vec{x},t)}{\partial t} = -\sum_i \frac{\partial J_i}{\partial q_i}$$

$$= -\left(\frac{\partial J_{q_1}}{\partial q_1} + \frac{\partial J_{q_2}}{\partial q_2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad J_i = \underbrace{v_i P}_{\text{drift}} - \underbrace{\frac{\Gamma_i}{T}\frac{\partial H}{\partial q_i} P}_{\text{fricción}} - \underbrace{D_i \frac{\partial P}{\partial q_i}}_{\text{difusiva}}$$

convección $\qquad$ Fokker $\qquad$ const. de difusión

H.W.

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = v_i - \frac{T_i^{(n)}}{T}\frac{\partial H}{\partial q_i} + S_i^{(n)}$$

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \text{ cons de energía}$$

$$0 = \frac{dH}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\cdot v_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} v_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2} v_2 = \dot{q}_2 \dot{q}_1 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 = 0$$

Flujo incompresible

Clase anterior $\Leftarrow \vec{\nabla}\cdot\bar{v} = 0$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{v} = 0 = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial q_i} = 0$$ Teorema de Liouville

$\Rightarrow$ situación estacionaria para P

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0 \Rightarrow \sum_i \frac{\partial J_i}{\partial q_i} = 0$$

H.W.

$$\Rightarrow P \propto \underbrace{e^{-H/T}}_{\text{factor de Boltzmann}}$$ condición de equilibrio

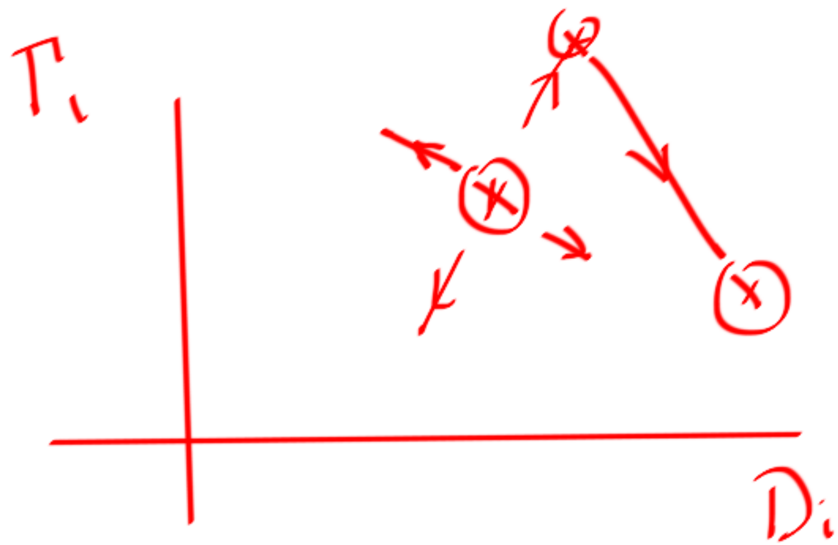
Solo si $\Gamma_i = D_i$ relación de Einstein

disipación / fricción

coeficiente de la correlación de ruido

necesaria para el equilibrio.

Eliminación de modos rápidos de relajación



Clase Jueves Renormalización 1 paso

$\xi \sim \overset{T}{L}$ → Siempre está fuera del equilibrio