

Clase 5: Comportamientos colectivos no triviales en redes dinámicas

Mario Cosenza

Mecánica Estadística Avanzada:

Modelos Discretos en Sistemas Complejos



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea





Contenido

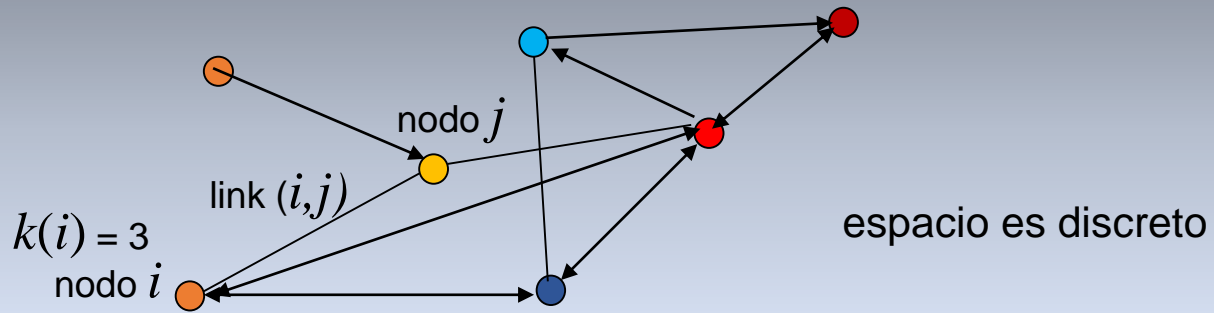


1. Redes de elementos dinámicos.
2. Sistemas dinámicos con tiempo discreto: mapas.
3. Dependencia de parámetros: diagrama de bifurcación.
4. Diagramas de bifurcación: ejemplos.
5. Redes de mapas acoplados en una dimensión.
6. Redes de mapas acoplados en 2 dimensiones.
7. Redes generales de mapas acoplados.
8. Sistemas dinámicos espaciotemporales: autómatas celulares.
9. Sincronización: un comportamiento colectivo universal.
10. Caracterización de comportamientos colectivos.
11. Sincronización y orden emergente.
12. Comportamiento colectivo no trivial.
13. Comportamiento colectivo no trivial: propiedades estadísticas.
14. Caos espaciotemporal global con periodicidad local.



Redes de elementos dinámicos

Sistema complejo: elementos dinámicos + red de interacciones



$i = 1, 2, \dots, N$ (tamaño del sistema)

$k(i)$ = número de conexiones de nodo i

\mathcal{V}_i : conjunto de vecinos de i

$x_i(t)$ = variable de estado del nodo i en tiempo t
(estados y/o tiempo pueden ser continuos o discretos)

Estado continuo, tiempo continuo → sistema (red) de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + \varepsilon \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \mathbf{g}(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t))$$

ε = parámetro de acoplamiento

$\mathbf{x}_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^m) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}^m$ = dinámica local, $\mathbf{g}(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t))$ = función de acoplamiento



Sistemas dinámicos con tiempo discreto: mapas

Mapas o funciones iterativas son sistemas dinámicos deterministas:

$$x_{n+1} = f(x_n, r) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad r = \text{parámetro}$$

$$x_n, f \in \mathbb{R} \rightarrow \text{estados continuos}$$

Secuencia de iterados para un valor r fijo: trayectoria con tiempo discreto.

$$\text{Dado } x_0 : \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = f^{(n)}(x_0)$$

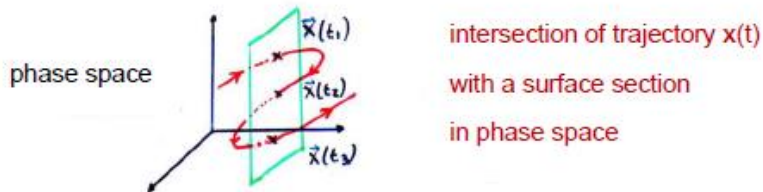
Mapas aparecen en muchos contextos:

- Series de datos experimentales en el tiempo.
- Integración numérica:

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = g(x(t)) \rightarrow x[(n + 1)\Delta t] = g(x(n\Delta t))\Delta t + x(n\Delta t), \quad t = n\Delta t$$

$$\rightarrow x_{n+1} = f(x_n)$$

- Sección de Poincaré en espacio de fase de sistemas con estados continuos:



Time series:

$$\{\vec{x}(t_1), \vec{x}(t_2), \vec{x}(t_3), \dots, \vec{x}(t_m)\}$$

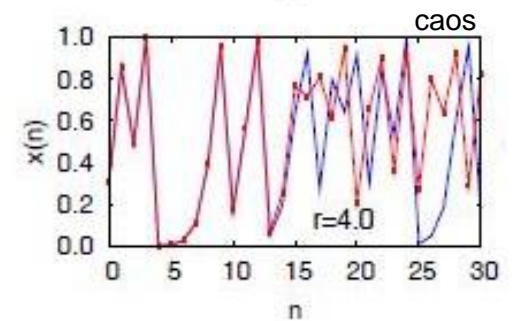
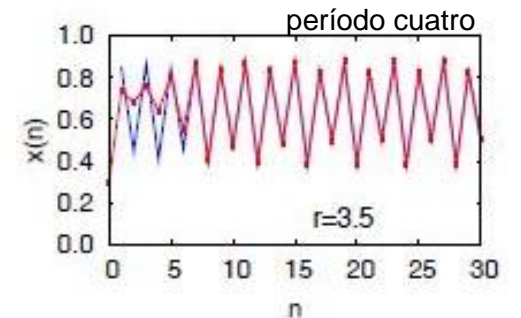
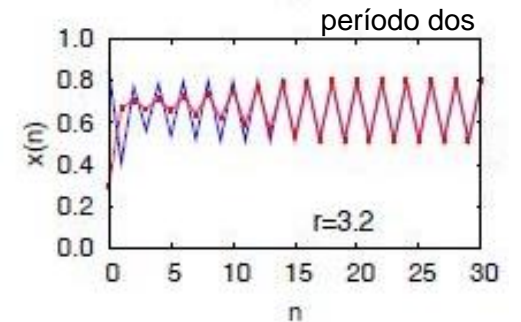
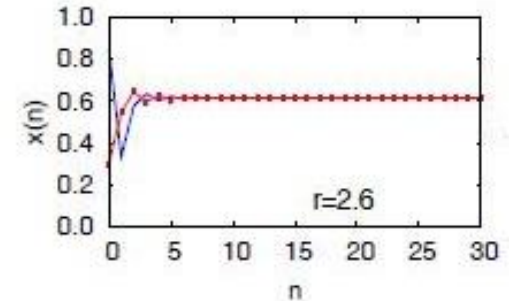
Ejemplo:

mapa logístico
(modelo de crecimiento de poblaciones con recursos limitados).

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

$$x_n \in [0, 1]$$

Condiciones iniciales
rojo y azul diferentes



Caos: evolución irregular, extremadamente sensible a pequeños cambios en condiciones iniciales rojo y azul → falta de predicción.



Dependencia de parámetros: diagrama de bifurcación

Comportamiento dinámico del sistema depende de parámetros.

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1-x_n) \quad x_n \in [0,1] \quad r = \text{parámetro}$$

Secuencia de iterados (órbita) para un valor r fijo: $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$ n grande

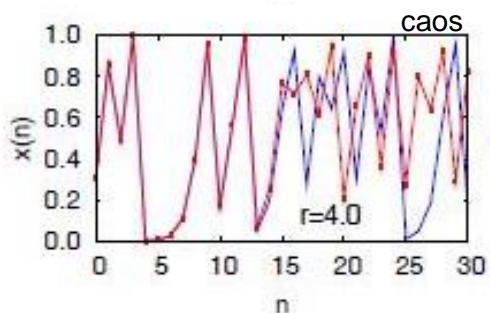
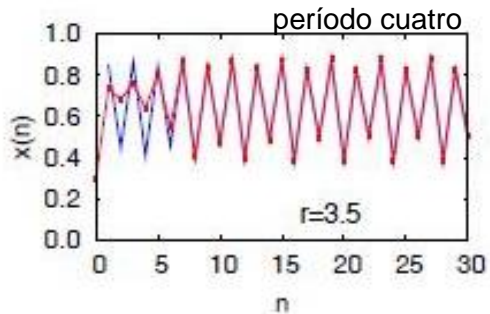
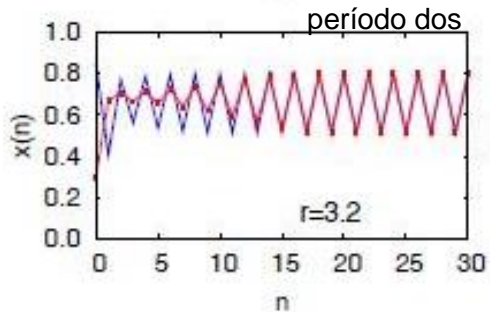
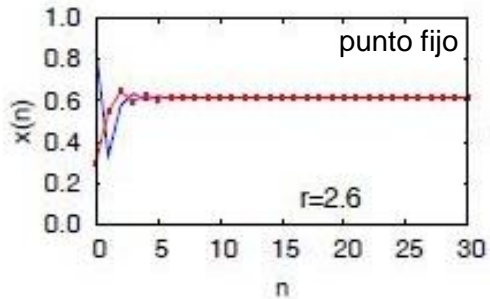
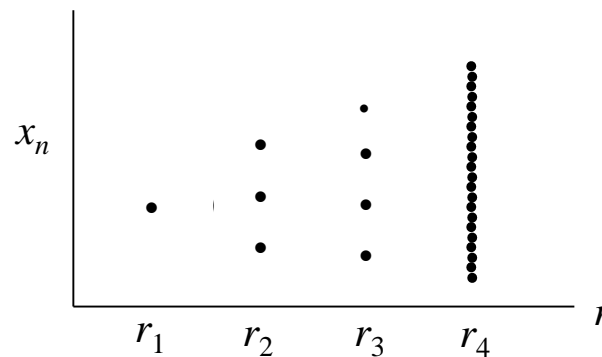


Diagrama de bifurcación: gráfico de órbitas asintóticas en función de r .

Algoritmo:

1. Dado r , obtener órbita a partir de x_0 : $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$
2. Descartar m puntos transitorios \rightarrow órbita asintótica para r : $\{x_{m+1}, \dots, x_n\}$
3. Para sucesivos valores r , obtener $\{x_{m+1}, \dots, x_n\}$
4. Graficar $\{x_{m+1}, \dots, x_n\}$ vs. r .



$n-m$ puntos para cada r .

r_1 : todos los puntos son iguales \rightarrow punto fijo.

r_2 : periodo 3. r_3 : periodo 4.

r_4 : caos (puntos no se repiten regularmente, segmentos continuos).



Diagramas de bifurcación: ejemplos

Bifurcación: cambio de comportamiento dinámico al variar parámetros.

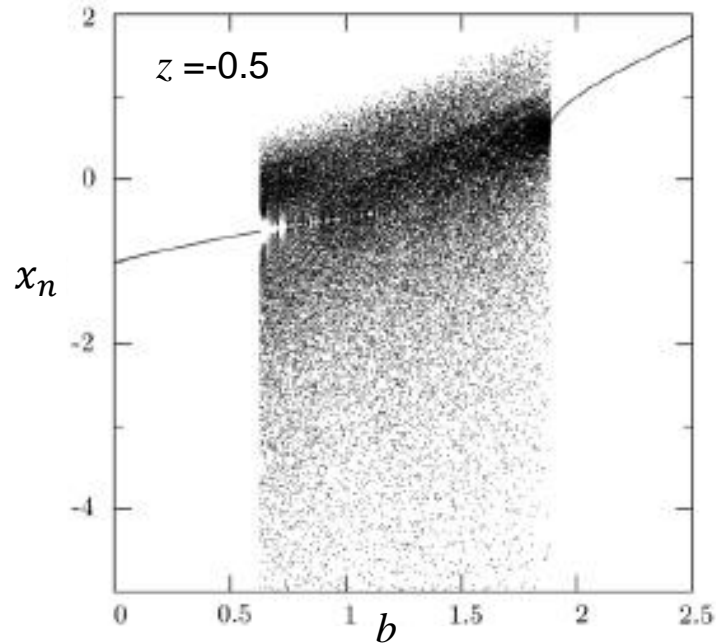
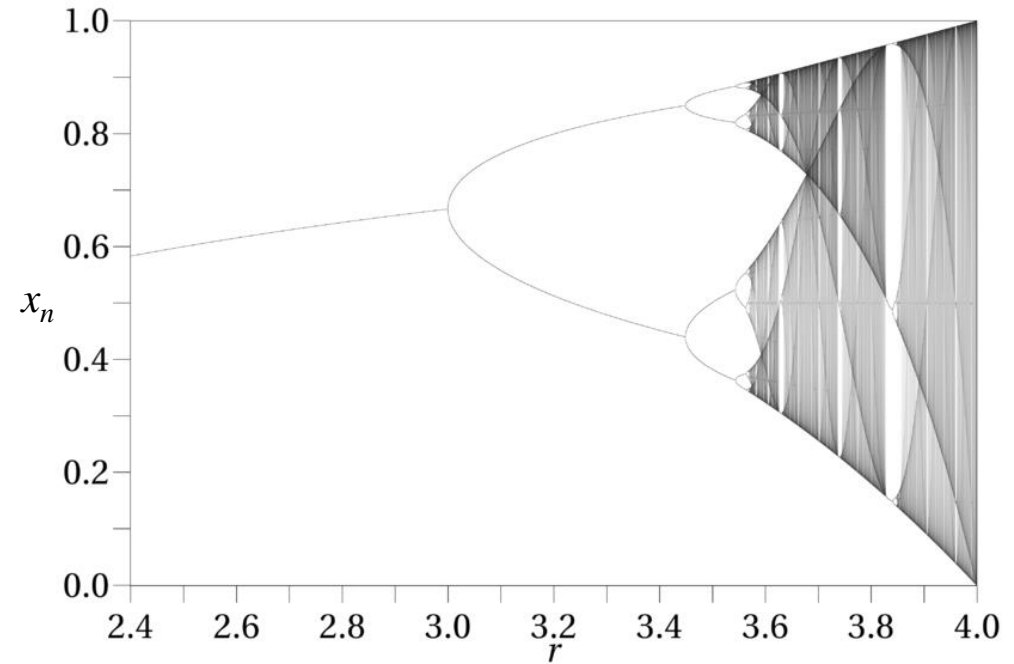
mapa logístico

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1-x_n)$$

Secuencia de duplicación de órbitas periódicas: $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4$ para $r < 3.569 \dots$

→ convergencia geométrica: *constante de Feigenbaum*.

Caos y ventanas de periodicidad para $r > 3.569 \dots$



mapa singular

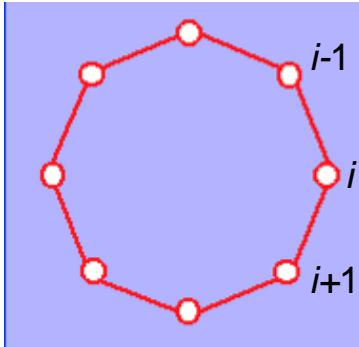
$$x_{n+1} = b - |x_n|^z$$

caos “robusto” (no ventanas periódicas) en intervalo finito de b

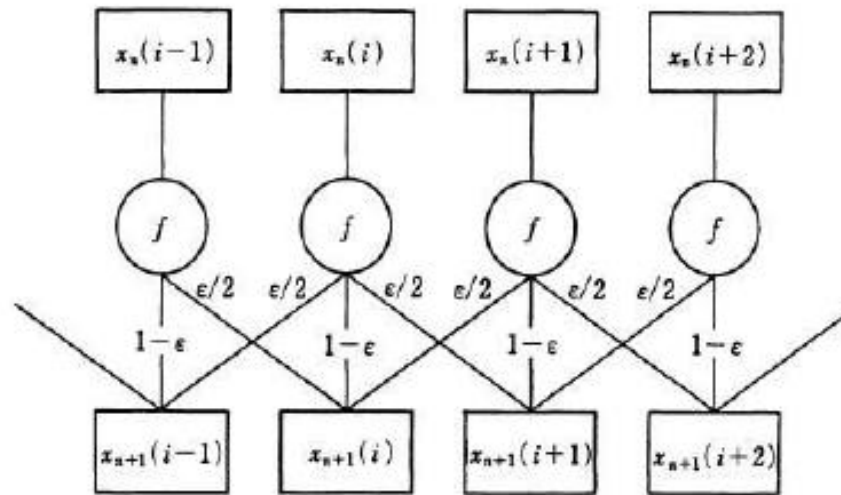


Redes de mapas acoplados en una dimensión

Red 1-dim, condiciones de contorno periódicas



$$x_{n+1}(i) = (1 - \epsilon)f(x_n(i)) + \frac{\epsilon}{2} [f(x_n(i+1)) + f(x_n(i-1))]$$



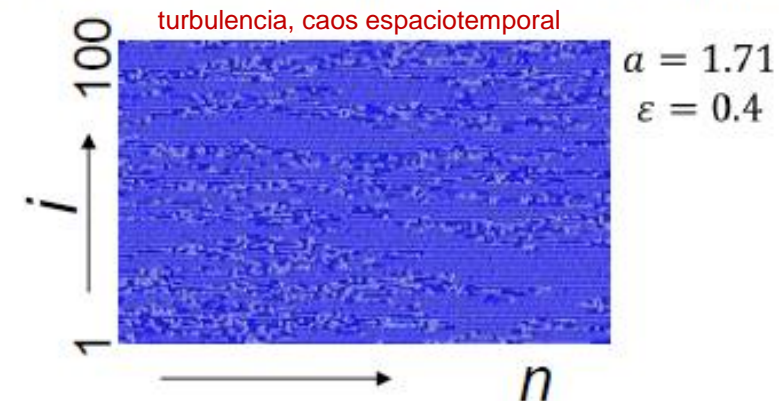
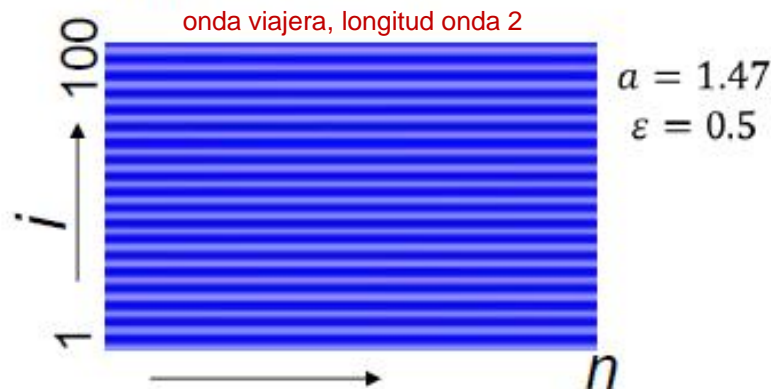
estados en el tiempo discreto n
↓
aplicar mapa local f a cada nodo i
↓
estados en el tiempo discreto $n+1$

K. Kaneko, Prog. Theor. Phys. **72**, 480 (1984).

I. Waller, R. Kapral, Phys. Rev. A **30**, 2047 (1984).

Ejemplo: mapa local $f(x_n) = 1 - ax_n^2$ $i=1,2,\dots,100$, condiciones de contorno periódicas

patrones espaciotemporales asintóticos:





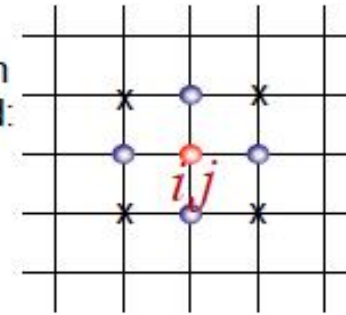
Redes de mapas acoplados en 2 dimensiones

Discretización del Laplaciano en 2 dimensiones:

$$\nabla^2 x = \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \rightarrow$$

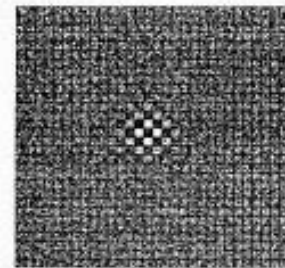
$$x(i+1, j) + x(i-1, j) + x(i, j+1) + x(i, j-1) - 4x(i, j)$$

von Neumann
neighborhood:
4 neighbors

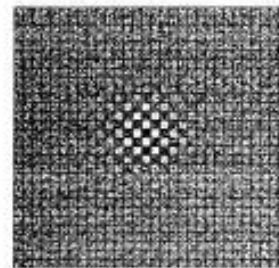


Moore
neighborhood:
8 neighbors

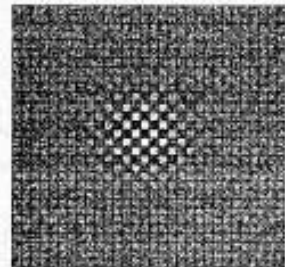
Redes de mapas acoplados pueden representar ecuaciones de reacción-difusión discretas en diversos sustratos no uniformes: fractales, medios desordenados, porosos, jerárquicos.



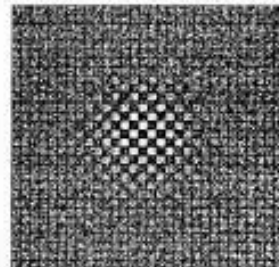
t=80



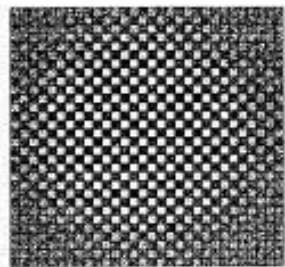
t=200



t=280



t=360



t=760



t=2360

Ejemplo: R. Kapral, Phys. Rev. A 31, 3868 (1985)

$$x_{t+1}(i, j) = f(x_t(i, j)) + D[x_t(i+1, j) + x_t(i-1, j) + x_t(i, j+1) + x_t(i, j-1) - 4x_t(i, j)]$$

Dinámica local: mapa logístico

$$f(x_t(i, j)) = r x_t(i, j)[1 - x_t(i, j)]$$

Patrones espaciotemporales:

$$N = 30 \times 30$$

$$r = 3.25, D = 0.1$$

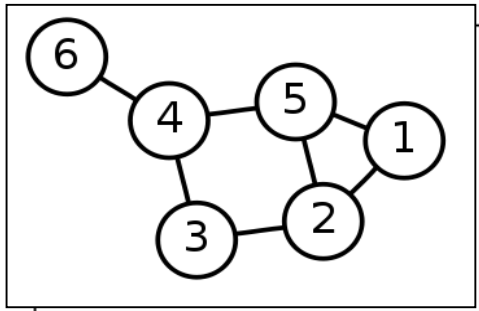
periodic boundary conditions in both directions.

Gray color code on interval [0, 1]

white \rightarrow 0, black \rightarrow 1.



Redes generales de mapas acoplados



matriz de
acoplamiento
o adyacencia

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i	v_i
1	2, 5
2	1, 3, 5
3	2, 4
4	3, 5, 6
5	1, 2, 4
6	4

tabla de vecinos

Evolution of system described by:

$$x_i(t+1) = f(x_i(t)) + \Phi(x_j(t) \mid j \in v_i) \quad i = 1, \dots, N \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

f : describes local dynamics Φ : function representing coupling or topology.

state $x_i(t)$ discrete \rightarrow celular automata.

x_i , if t continuous $\rightarrow \dot{x}_i(t)$ set of coupled differential equations.

state $x_i(t)$ continuous \rightarrow coupled maps.

Dynamics of the system can be represented in **vector form**. Example: $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + D\mathbf{M}\mathbf{x}(t)$

State vector of network at time t :

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{pmatrix}$$

Local dynamics:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \begin{pmatrix} f(x_1(t)) \\ f(x_2(t)) \\ f(x_3(t)) \\ f(x_4(t)) \\ f(x_5(t)) \\ f(x_6(t)) \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

componentes:

$$x_{t+1}(i) = f(x_t(i)) + D \sum_{j=1}^N M_{ij} x_j(t)$$

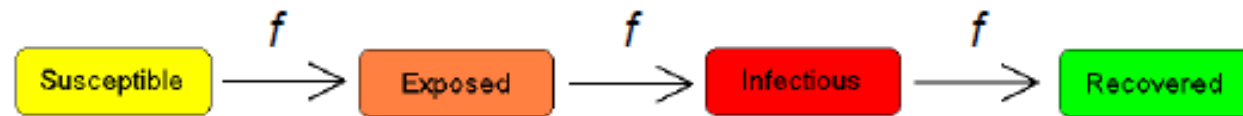


Sistemas dinámicos espaciotemporales: autómatas celulares

Si las variables de estado $x_n(i)$ son discretas, modelos se denominan **autómatas celulares**.

Ejemplos: opiniones (si-no), voto, rankings, juego de la vida de Conway, epidemias.

Modelo SEIR de epidemia: $x_n(i) \in \{S, E, I, R\}$



Spatiotemporal dynamical system	State variables	Time	Space
Partial differential equations	C	C	C
Dynamical systems diff. eqs	C	C	D
Coupled map networks	C	D	D
Cellular Automata	D	D	D

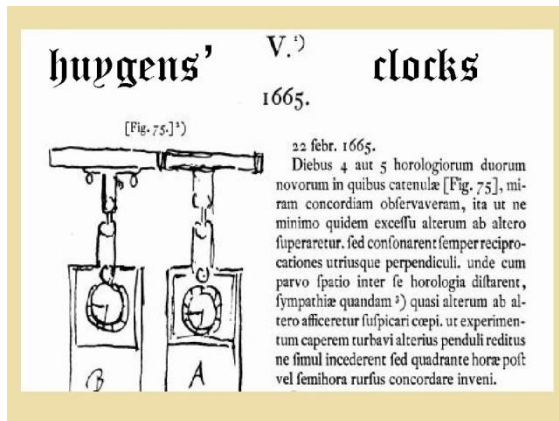
C=continuos D=discrete



Sincronización: un comportamiento colectivo universal

Red (sistema) de elementos interactivos. $x_i(t) =$ estado de elemento i en tiempo t . $i = 1, \dots, N$

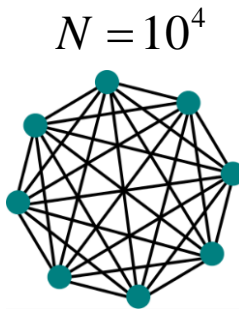
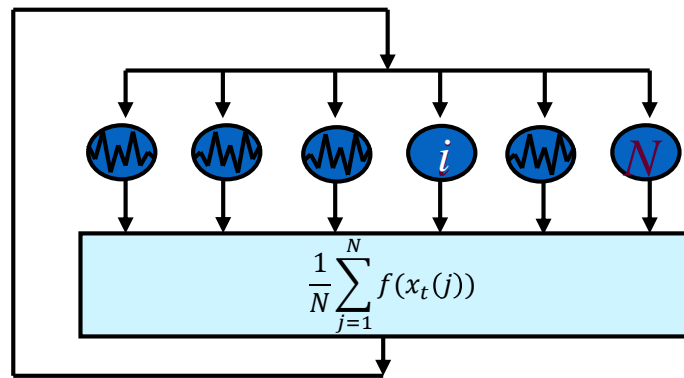
Sincronización: $x_i(t) = x_j(t)$, $\forall i, j$ sostenido en el tiempo.





Caracterización de comportamientos colectivos

Red globalmente acoplada, interacción global:



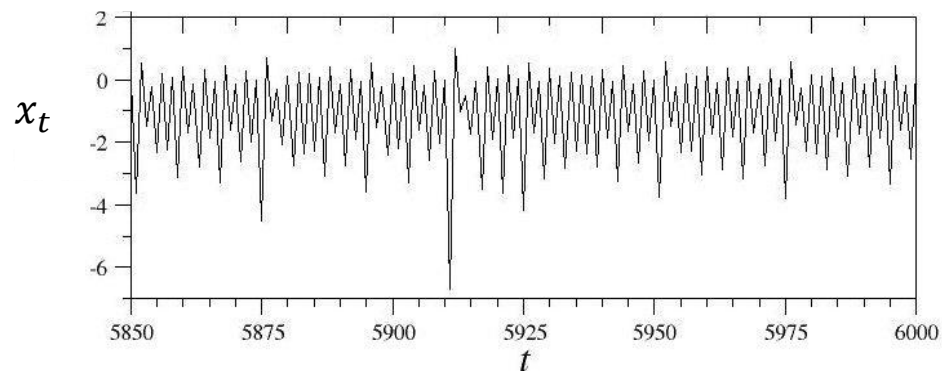
$$x_{t+1}(i) = (1 - \epsilon) f(x_t(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t(j))$$

ϵ : parámetro de acoplamiento. $t = 0, 1, 2, \dots$

$x_0(i)$ condiciones iniciales distribuidas aleatoriamente

dinámica local caótica familia (b, z) : $x_{t+1} = f(x_t) = b - |x_t|^z$

Usar: $z = -0.5$, $b = 1.5$ → mapa caótico, no periódico



Caracterización del comportamiento colectivo:

Media del sistema en tiempo t :
$$S_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_t(i)$$

Dispersión en tiempo t :
$$\sigma_t = \left[\frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N (x_t(i) - S_t)^2 \right) \right]^{1/2}$$

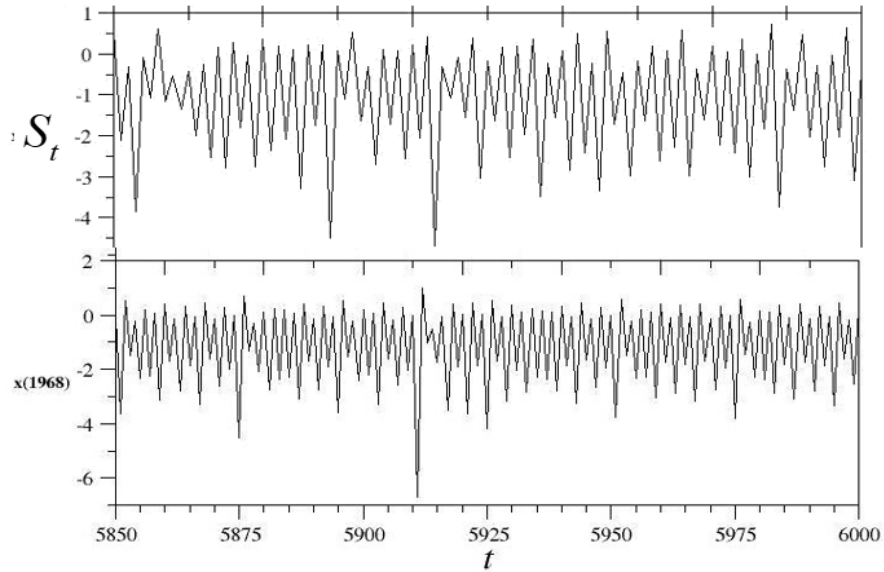
Desviación standard promedio para tiempos largos T (s transitorios):
$$\sigma = \frac{1}{T - s} \sum_{t=s}^T \sigma(t)$$

Sincronización → $\sigma = 0$



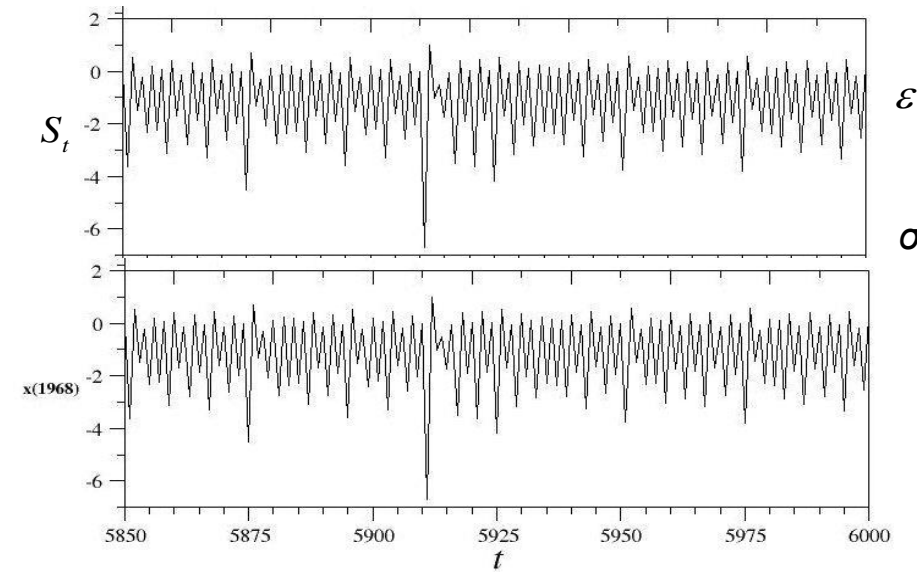
Sincronización caótica y orden emergente

comportamiento incoherente, desincronizado



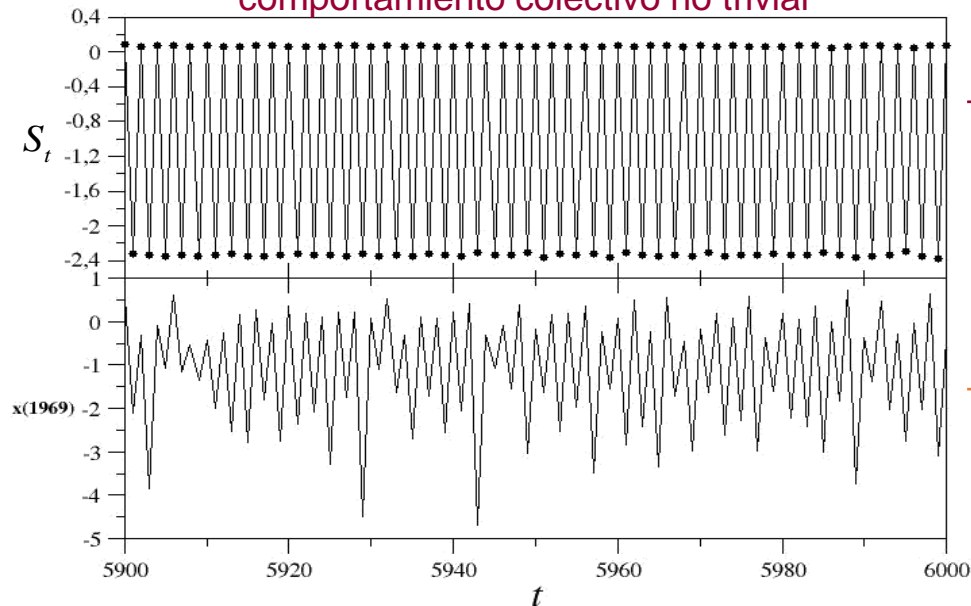
$N = 10^4$
 $\varepsilon = 0.04$

comportamiento coherente: sincronización caótica

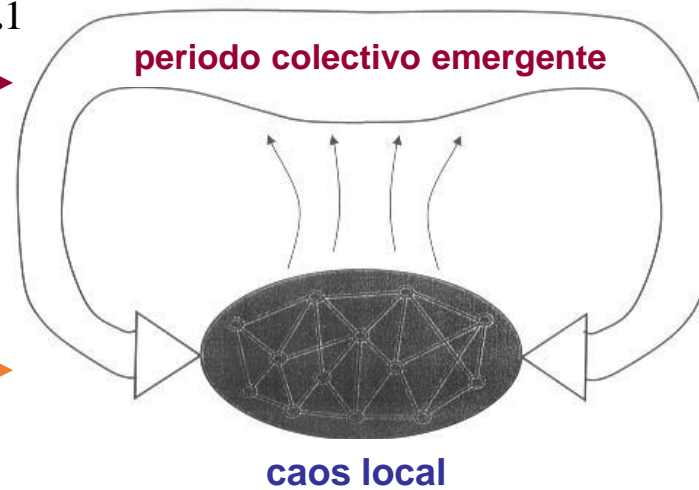


$\varepsilon = 0.4$
 $\sigma = 0$

comportamiento colectivo no trivial



$\varepsilon = 0.1$



Comportamiento colectivo no trivial

Fluctuaciones de S_t no decrecen con aumento de N
→ periodo se hace mejor definido.



Comportamiento colectivo no trivial

Red de mapas globalmente acoplados:

$$x_{t+1}(i) = (1 - \epsilon)f(x_t(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t(j))$$

$$f(x_t(i)) = 1.1 - |x_t(i)|^{-0.25}$$

$$N = 10^4$$

diagramas de bifurcación:
10³ iterados por cada valor ϵ ,
descartando 10³ transitorios

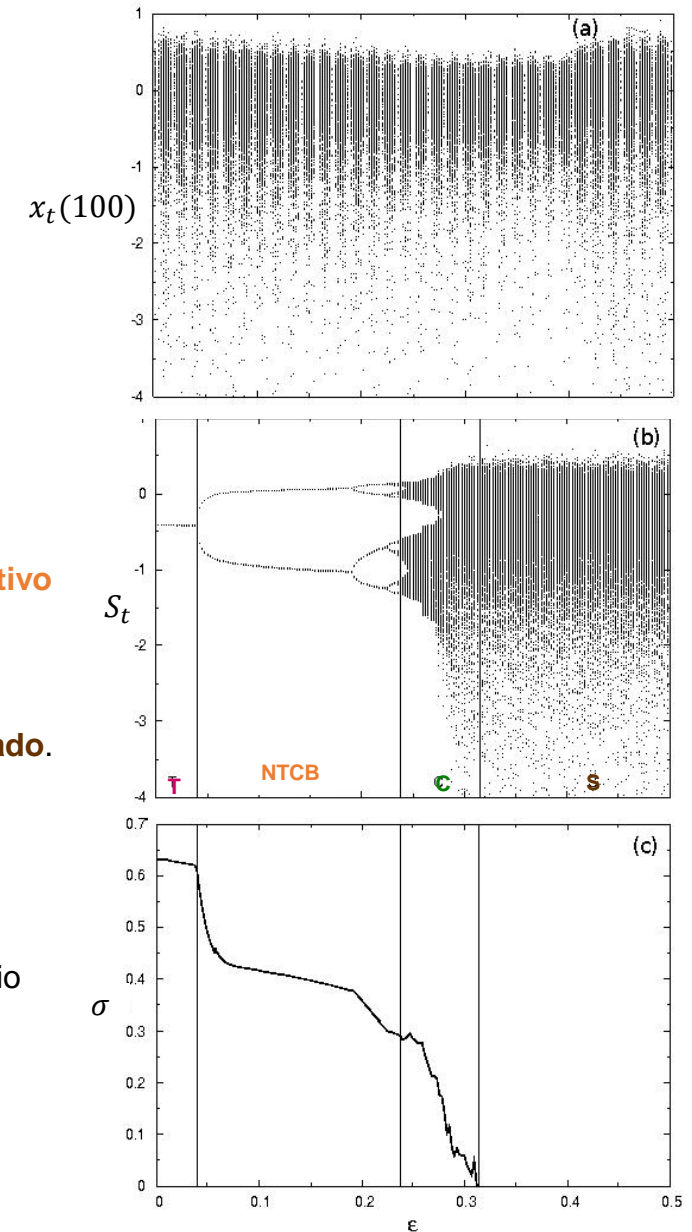
T: estado desincronizado

NTCB: comportamiento colectivo ordenado, no trivial

C: caos colectivo

S: comportamiento sincronizado.

Dispersión promedio en función de ϵ





Comportamiento colectivo no trivial: propiedades estadísticas

PHYSICAL REVIEW

LETTERS

PRL 65, 1391 (1990)

VOLUME 65

17 SEPTEMBER 1990

NUMBER 12

Globally Coupled Chaos Violates the Law of Large Numbers but Not the Central-Limit Theorem

Kunihiko Kaneko

Institute of Physics, College of Arts and Sciences, University of Tokyo, Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153, Japan

(Received 18 June 1990)

$$S_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_t(i)$$

campo medio del sistema en tiempo t

$$\langle S \rangle = \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=\tau}^{T-\tau} S_t$$

valor medio de S_t sobre serie temporal, descartando τ transitorios

$$\text{MSD} = \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=\tau}^{T-\tau} (S_t - \langle S \rangle)^2$$

desviación cuadrática media de S_t

$$\text{MSD} = \langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2$$

Ley de grandes números: $\text{MSD} \propto N^{-1}$

Red de mapas globalmente acoplados:

$$x_{t+1}(i) = (1 - \varepsilon) f(x_t(i)) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t(j))$$

$f(x_t) = 1 - ax_t^2$ dinámica local caótica ($a > 1.4$)

$f(x_t): [-1,1] \rightarrow [-1,1]$

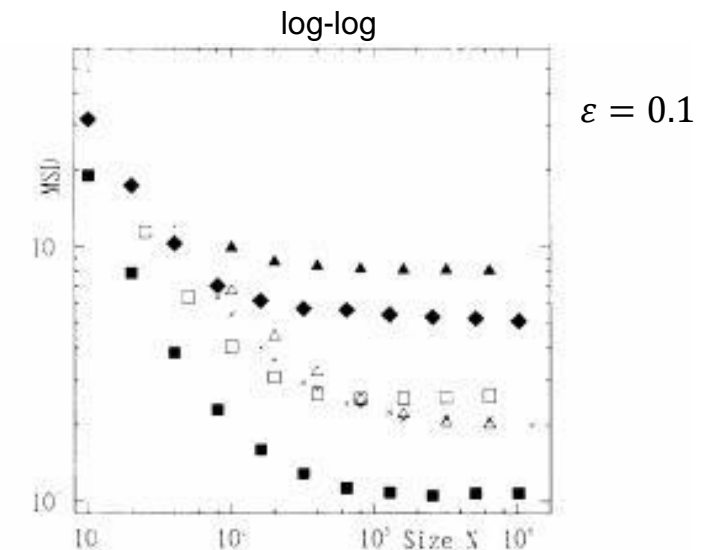


FIG. 2. Mean-square deviation (MSD) of the distribution of mean field h , plotted as a function of system size. The MSD is calculated over 10^5 time steps after 10^4 transients. $\varepsilon = 0.1$. The parameter a is 1.80 (■), 1.83 (□), 1.85 (◆), 1.92 (▲), 1.95 (△), and 1.99 (×).



Caos espaciotemporal global con periodicidad local

Dinámica local: $f(x_t) = rx_t(1 - x_t)$

Para $r=3.83$, existe una orbita de periodo 3 en dinámica local: $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3$

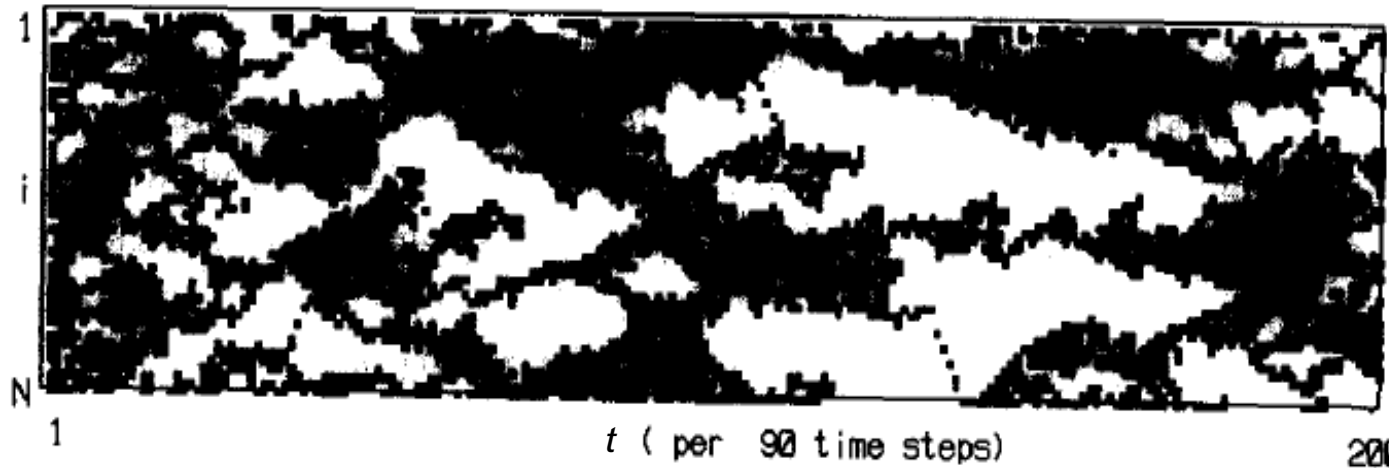
$$f_{r=3.83}^{(3)}(x_1) = x_1$$

Red de mapas acoplados en 1 dimensión (condiciones de contorno periódicas):

$$x_{t+1}(i) = (1 - \epsilon)f(x_t(i)) + \frac{\epsilon}{2}[f(x_t(i-1)) + f(x_t(i+1))]$$

Código para visualización: Si $|x_t(i+1) - x_t(i)| < 0.03 \Rightarrow x_t(i) \rightarrow \blacksquare$ Si no: $x_t(i) \rightarrow \square$

patrón espaciotemporal



$r = 3.83$

$N = 60$

$\epsilon = 0.001$

Caos colectivo espaciotemporal
emerge de periodicidad local

Estado supertransitorio,
tiempo de relajación: $T \sim e^N$



Apéndice: discretización del operador Laplaciano

One-dimensional reaction-difusión system:

$$\frac{\partial x}{\partial t}(z, t) = f(x(z, t)) + D \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z, t)$$

Discrete time: $t = n \Delta t, \quad n=0,1,2,3,\dots$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x) \rightarrow \frac{x((n+1)\Delta t) - x(n\Delta t)}{\Delta t} = f(x(n\Delta t))$$

Discrete time arbitrary units: $\Delta t = 1,$

$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n + f(x_n)$$

Iterative function, or map: deterministic dynamical system.
Dynamical behavior of x_n depends on parameters of f

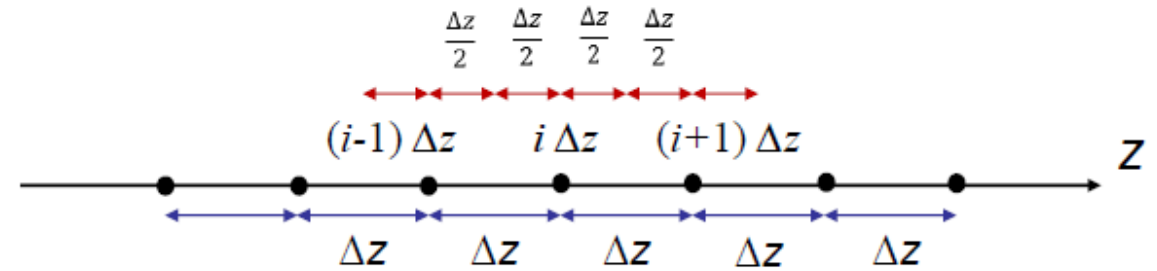
$$x_0 \rightarrow x_1 = F(x_0),$$

$$x_2 = F(x_1) = F^{(2)}(x_0)$$

$$x_n = F^{(n)}(x_0)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)$$

discrete space: $z = i\Delta z, \quad i = \text{integer}.$



$$\frac{\partial x}{\partial z}(i\Delta z) \rightarrow \frac{x\left(i\Delta z + \frac{\Delta z}{2}\right) - x\left(i\Delta z - \frac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right) \rightarrow \frac{1}{\Delta z^2} \times \left[\frac{\partial x\left(i\Delta z + \frac{\Delta z}{2}\right)}{\partial z} - \frac{\partial x\left(i\Delta z - \frac{\Delta z}{2}\right)}{\partial z} \right] = \frac{x(i+1)\Delta z - x(i\Delta z) - [x(i\Delta z) - x(i-1)\Delta z]}{\Delta z^2}$$

$\Delta z = 1:$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \rightarrow x(i+1) + x(i-1) - 2x(i)$$



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongaphysics



Latin American alliance for
Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.