Buenas tardes

Curso: MC + DM

La CoNGA Physics

Ernesto Medina

# Teoremas límites:

$$F(S_n) \leftarrow S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots X_n$$

$f(x)$

- idénticamente distribuidas
- independientes

iid

$\rightsquigarrow$ asume que $E[X]\ \exists!$

$$E[S_n] = n\,E[X_1]$$

$$Var[S_n] = n\,Var[X_1]$$

– Ley fuerte de límite central

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right) = 1 \;!!$$

$$E[X] = \mu$$

– $$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x)$$

Teorema del límite central Gaussiano!

$\underline{Ex.}$

$$P_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{c} & 0 < x < c \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

$$Y = X_1 + X_2 \qquad P(Y)$$

$$E[Y] = E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2]$$

$$= 2E[X_1]$$

$$\boxed{E]}$$

Computar

$$2\,Var[X] = Var[Y] = Var[X_1 + X_2] = E[(X_1 + X_2)^2] - E^2[X_1 + X_2]$$

$$E[x_1 + x_2 + \dots x_n] = n\,E[x_1]$$

$$Var[x_1 + \dots + x_n] = n\,Var[x_1]$$

y

$$\frac{Var[x_1 + \dots + x_n]}{E^2[x_1 + x_2 + \dots x_n]} = \frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} \frac{Var[x_1]}{E^2[x_1]}$$

$$= \frac{1}{n^1}$$

y

no universalidad

Como hallamos la dist. de probabilidad?

$Y = X_1 + X_2$ $\quad$ $X_1$ y $X_2$ son indep

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(y - x_1)\, dx_1$$

Ej:

$f_X(x) =$ densidad de prob. const en $[0, C]$

$$\underbrace{P_y}_{\text{density}}\underbrace{(y)\,dy}_{\text{probability}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)\, f(x_2)\, \delta(y-(x_1+x_2))\, dx_1\, dx_2$$

$$\delta(y-(x_1+x_2)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x_1+x_2-y)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)\, f(x_2) \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x_1+x_2-y)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{-iky} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)\, e^{ikx_1}\, dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(x_2)\, e^{ikx_2}\, dx_2$$

$$P(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\; e^{-iky}\; Q^2$$

información microscopía

Ej. utilizar densidad const. ←

Generalizar a $n$ variables.

Ej. $P(x) = p\,\delta(x-e) + q\,\delta(x-e^{-1})$

probabilidad de superar longitud del paso

# Procesos de Markov

Proceso estocástico cuyo futuro son condicionalmente dependientes sólo de su valor presente.

- Un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$

$T$ conjunto de índices

con $T \subseteq \mathbb{R}$

$T$ disc. $\rightarrow$ cadena Markov

$T$ cont. $\rightarrow$ saltos de Markov.

si $\forall$ $s > 0$

$$(X_{t+s} \mid X_u, u \leq t) = (X_{t+s} \mid X_t)$$

# Cadenas de Markov

Sea la cadena de Markov

$$X = \{ X_t , t \in \mathbb{N} \}$$

y tenemos un espacio de estados contable $E$

$$\Rightarrow P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_0 = x_0, \ldots, X_t = x_t)$$

$$= P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t)$$

↳ Probabilidad transición

- La probabilidad de Transición es indep. de tiempo
- Condición inicial $X_0$

Dado $X_0$ y $P(X_{t+1} | X_t)$ la cadena está totalmente especificada

$$P(x_0, x_1, \ldots, x_t) = P(x_0)\, P(x_1 | x_0)\, P(x_2 | x_1, x_0) \cdots P(x_t | x_{t-1}, \ldots, x_0)$$

Si aplica Markov

$$= P(x_0)\, P(x_1 \mid x_0)\, P(x_2 \mid x_1) \cdots P(x_t \mid x_{t-1})$$


$\mathcal{E}$

Matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}$$

## Caminata aleatoria (1D)

Dado $p, q \in [0,1]$

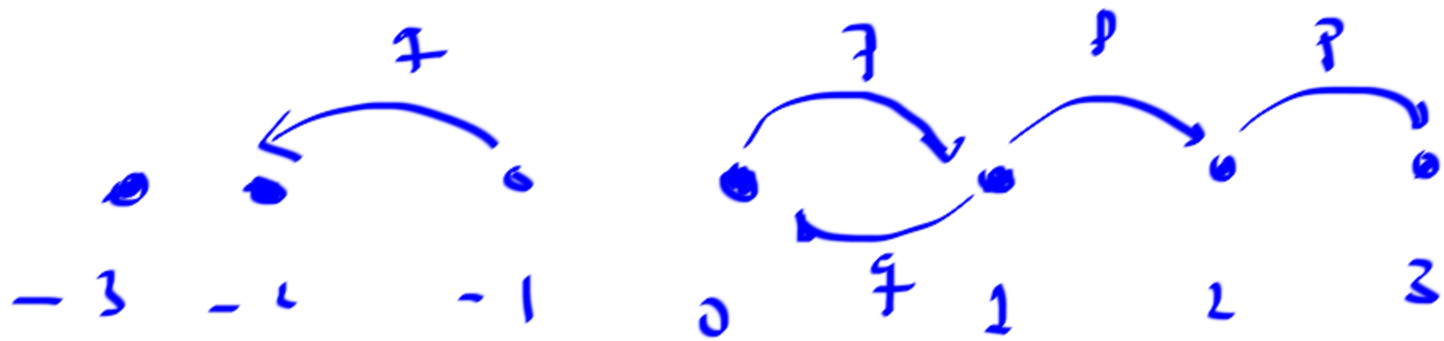
Tenemos una cadena de Markov $X$ con el espacio de estados $\mathbb{Z}$ (números naturales)

Matriz de transición $P$

$$P(i, i+1) = p \qquad P(i, i-1) = q$$

$$\forall i \in \mathbb{Z}$$

Si comenzamos en $X_0 = 0$ $\quad P(X_0 = 0) = 1$




Queuing Computer:

$$P(X_{t+s} = j \mid X_t = i)$$

$$E = \{1, 2, 3 \dots n\}$$

$P$ matrix $n \times n$

$$\pi^{(t)} = \left( P(X_t = 1), P(X_t = 2) \dots P(X_t = n) \right)$$

$$\xrightarrow{\hspace{6em}}$$

$$\pi^{(0)} = \qquad t \to 0$$

evolución del vector de prob.

$$\pi^{(t)} = \pi^{(0)} P^t$$

$$\pi^{(1)} = \pi^{(0)} P$$

$$\underbrace{\pi^{(i)} = \pi^{(i-1)} P} \qquad \pi^{(2)} = \pi^{(0)} P^2 = \overbrace{\pi^{(0)} P}^{\pi^{(1)}} P$$

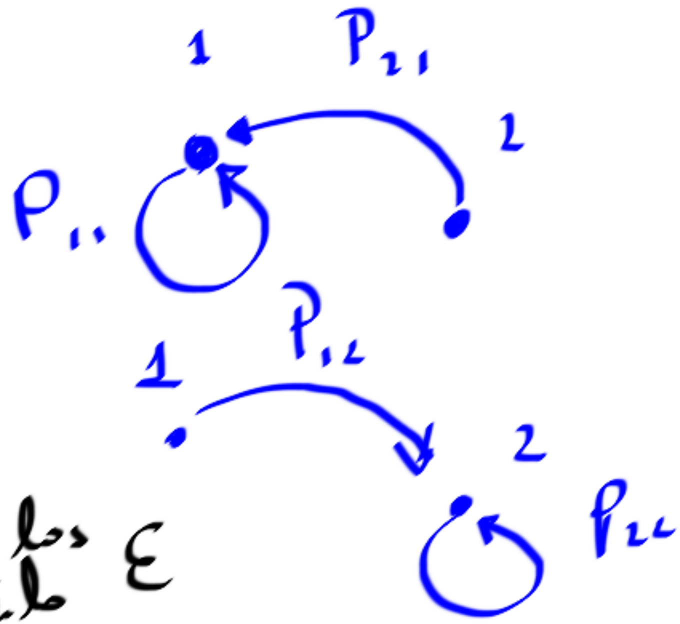
$n = 2$

$$\big(P(X_1=1),\ P(X_1=2)\big) = \big(P(X_0=1),\ P(X_0=2)\big)\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

$$\pi^T \pi$$

$$= \big(P(X_0=1)\,P_{11} + P(X_0=2)\,P_{21},\ \ P(X_0=1)\,P_{12} + P(X_0=2)\,P_{22}\big)$$

$$P(X_1=1) = P(X_0=1)\,P_{11} + P(X_0=2)\,P_{21}$$




diagramática

Si $P_{21} \neq 0$

$P_{12} = 0$

entonces 1 es un sumidero

exploración de los uniforme estados $\varepsilon$

$\hat{N}$

**Ergodicidad**