Clase 19:
Introducción a los Sistemas Complejos

Mario Cosenza

Módulo de Instrumentación

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

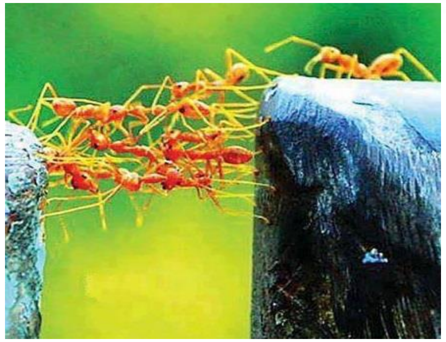
Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

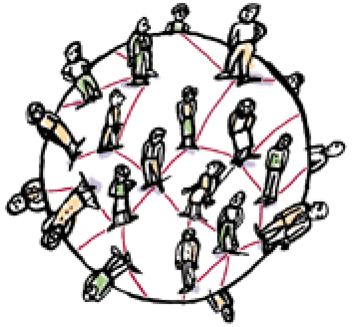
Sistemas Complejos

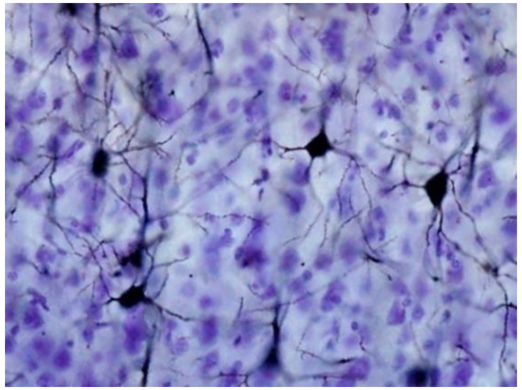
Sistema complejo: conjunto de elementos interactivos cuyo comportamiento colectivo (estructuras, funcionalidad, organización) no puede ser descrito a partir del comportamiento de los elementos aislados; ***emerge*** de sus interacciones → **No linealidad.**

Comportamientos colectivos comunes: sincronización (coherencia), formación de patrones, auto-organización, adaptación, transición orden-desorden, red de conectividad → **Universalidad.**

Ejemplos: osciladores no lineales acoplados, colonias de insectos, cardúmenes, tráfico, sistemas ecológicos, sistemas fisiológicos, clima, economía, sistemas sociales, cerebro. → **Interdisciplinariedad.**

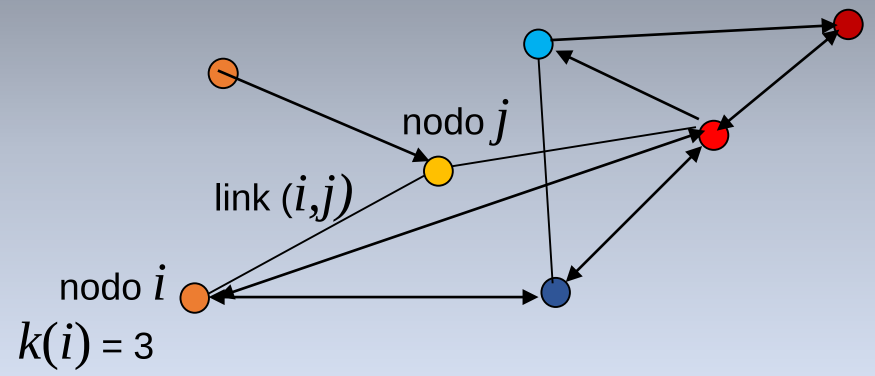






Redes: la estructura de sistemas complejos

Sistemas complejos: elementos dinámicos + red de interacciones (conexiones, enlaces, links).



$i = 1,2,\ldots,N$ (tamaño del sistema)

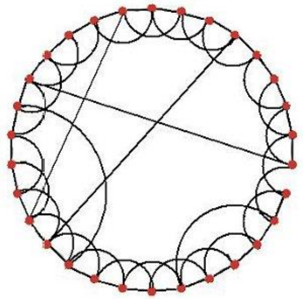
$k(i)$ = número de conexiones de nodo i

$x_i(t)$ = *variable de estado de nodo* i en tiempo t

(estados y/o tiempo pueden ser continuos o discretos)

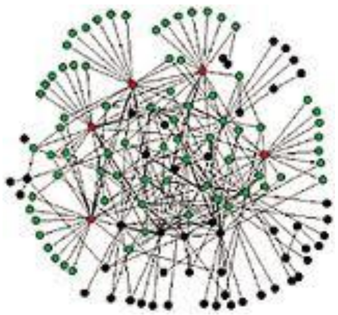
Redes Complejas: estructuras características en sistemas de diversos contextos.

Small world



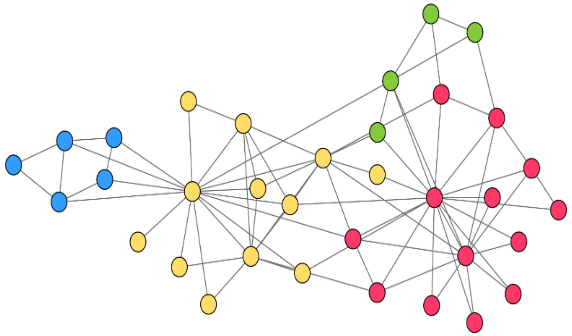
Distancia media entre nodos $\ll N$
entre ordenada y aleatoria

Scale free



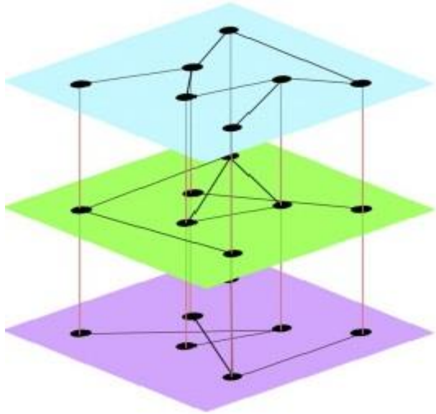
Distribución de links: $P(k) \sim k^{-\alpha}$
Pocos nodos con muchos links,
muchos nodos con pocos links

Comunidades



Subgrupos con muchos links internos,
pocos links entre distintos subgrupos

Multicapas



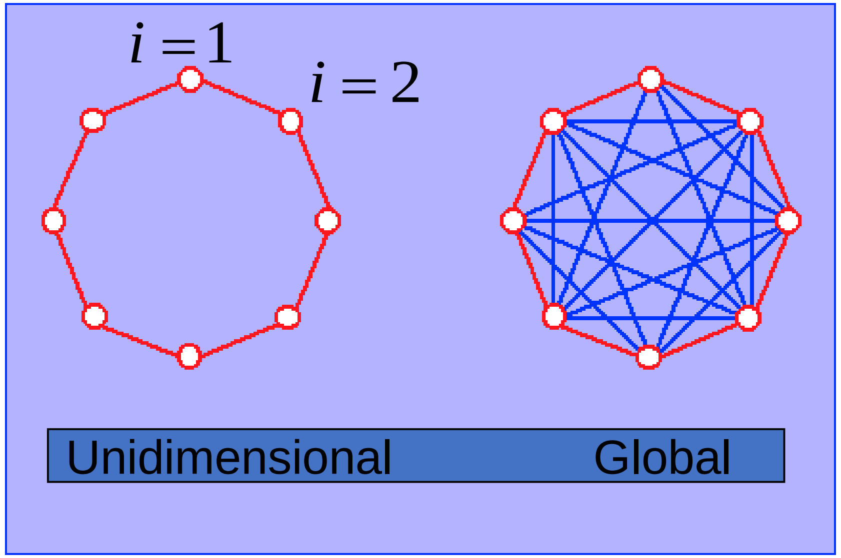
Diferentes redes coexistentes

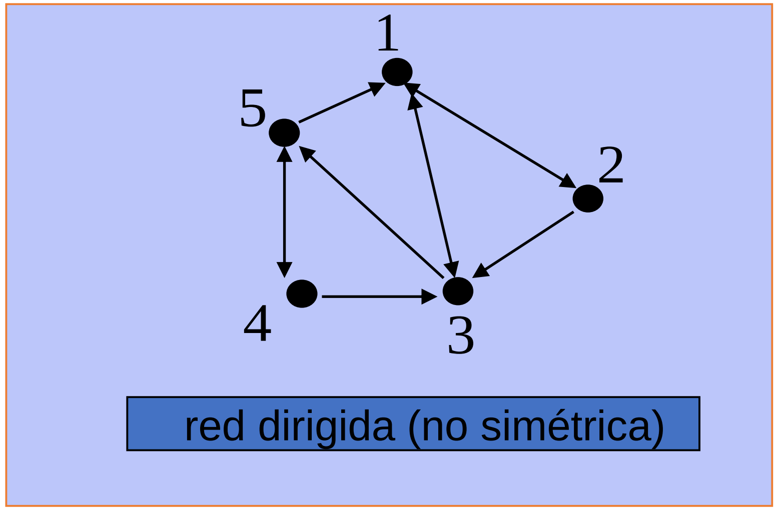
Matriz de conectividad

Red de interacciones se puede expresar como matriz de acoplamiento o adyacencia N × N: $M_{ij}^{\alpha}(t)$

i,j: elementos (nodos) del sistema, *α*: tipo de interacción, *t*: dependencia en el tiempo.

Valor de $M_{ij}^{\alpha}(t)$ indica la intensidad de la interacción tipo *α* entre elementos *i* y *j* en el tiempo *t.*





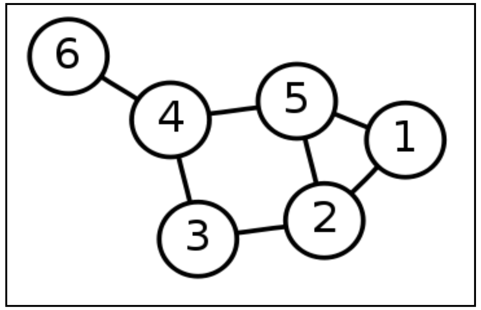
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & & \mathbf{0} & \\ & 1 & 0 & 1 & & & & \\ & & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & & 1 & 0 & 1 & \\ & \mathbf{0} & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0&1&1&0&1 \\ 1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&1&0 \end{bmatrix}$$

M contiene la topología de la red.

Tabla de vecinos



matriz de adyacencia

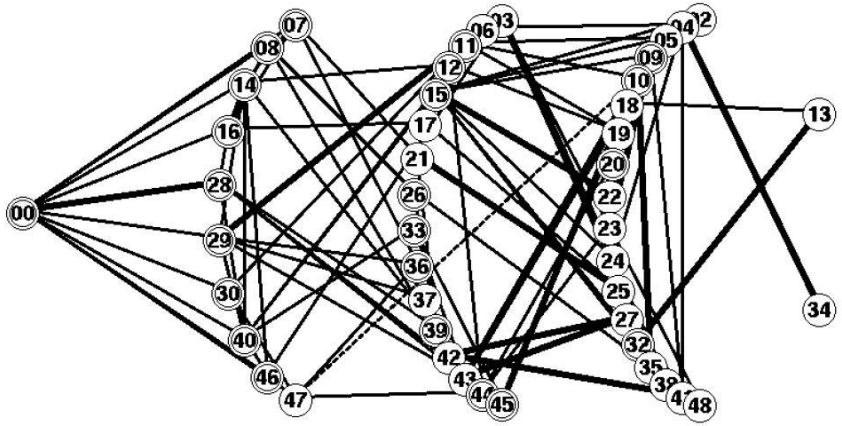
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tabla de vecinos

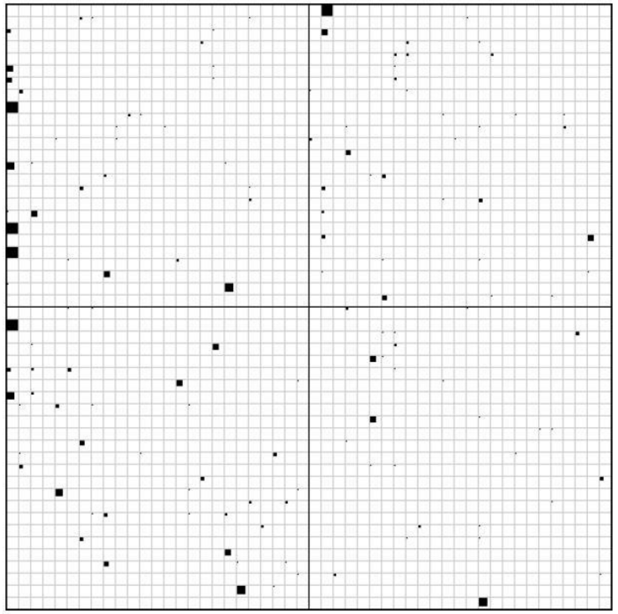
1	2, 5
2	1, 3, 5
3	2, 4
4	3, 5, 6
5	1, 2, 4
6	4

En general, "peso" del acoplamiento i,j: $M_{ij} \in [0,1]$

Ejemplo: redes neuronales



J. Ito, K. Kaneko, Neural Networks **13**, 275 (2000).



50×50

Características de sistemas complejos

"We call *emergence God Principle*,
as particle physicists talk about God Particle.

Philip Anderson,
More and Different (2011) .

"I think the next century will be the century of complexity".

Stephen Hawking .
San Jose Mercury News, January 2000.

Características de los sistemas complejos:

- Muchos elementos o componentes (no necesariamente homogéneos) discretos en interacción.
- *Interacciones generalizadas*: no limitadas a las 4 fuerzas fundamentales; intercambio de mensajes, tweets, contactos, dinero, información, etc)
- Variables de estado: cualquier propiedad que pueda cambiar: (posición, velocidad, spin, forma, color, opinión, riqueza, amistad, etc)
- No lineales (deterministas o estocásticos), no superposición; comunmente *algoritmicos*.
- Sistemas fuera del equilibrio (generalmente) .
- Estructura, comportamiento a escala superior emerge de interacciones a escalas inferiores.
- Sistemas de contextos distintos (físicos, químicos, biológicos, sociales) pueden exhibir comportamientos colectivos similares: *universalidad.*
- Comportamiento complejo no requiere causas complejas (no muchos parámetros).

Aplicaciones Interdisciplinarias

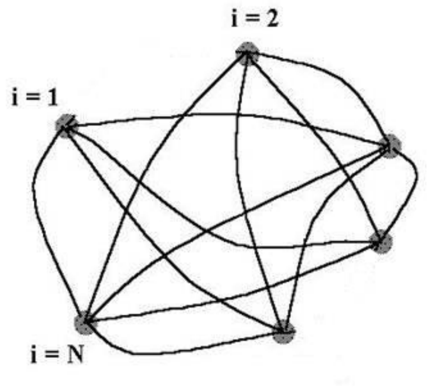
Sistemas Dinámicos/Caos:
Sistemas dinámicos espaciotemporales, redes dinámicas, autómatas celulares, turbulencia, clima, análisis de datos, criptografía, sismos, límites de predicción, sincronización, estados quiméricos, comportamientos colectivos emergentes.

Sociofísica:
modelos de formación de opiniones, consenso y polarización, elecciones, cooperación, influencia cultural, globalización, medios de comunicación masiva, propaganda, propagación de rumores, modelos de conflicto, corrupción, terrorismo, redes sociales (reales y virtuales), influencers o líderes, migraciones.

Econofísica:
distribución de riqueza, intercambio económico, mercados financieros, redes de distribución de bienes y servicios, bancos, comercio global, formación de alianzas y bloques.

Física Biológica:
propagación de epidemias, modelos de crecimiento celular, evolución, redes de interacción de proteínas y genes, modelos ecológicos, movimientos colectivos (enjambres, rebaños), dinámica neuronal, análisis de señales fisiológicas (EEG, ECG), epilepsia.

Redes de elementos dinámicos



$x_t(i)$: estado continuo del elemento i en el tiempo discreto $t=0,1,2....$

ν_i : conjunto de vecinos $k(i)$: # de vecinos de i

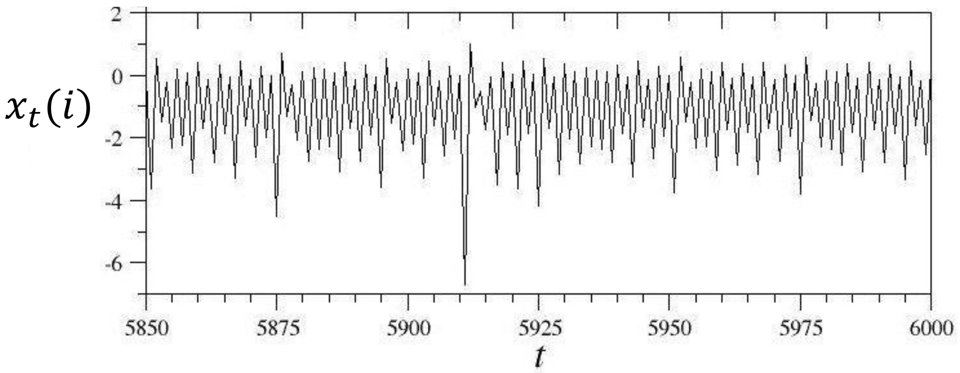
$x_{t+1}(i) = f(x_t(i))$: dinámica local de i. Función iterativa o mapa

Ejemplo: $x_{t+1}(i) = f(x_t(i)) = b - |x_t(i)|^z$

x_0: condición inicial $\rightarrow x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \cdots$

secuencia de iterados (trayectoria): $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots$

Para $z = -0.5$ b = 1.5 → caótico, no periódico



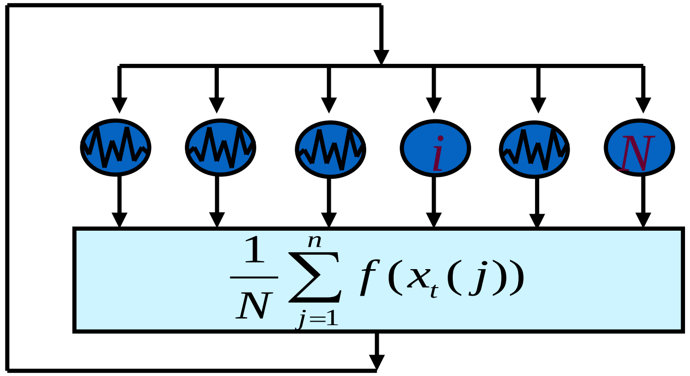
Modelo simple: red de mapas acoplados:

$$x_{t+1}(i) = f\big(x_t(i)\big) + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} M_{ij} f(x_j(t))$$

ϵ: parámetro de acoplamiento. M_{ij}: matriz de acoplamiento

Caracterización de comportamiento colectivo

Red globalmente acoplada, interacción global:



$$N = 10^4$$

$$x_{t+1}(i) = (1-\varepsilon) f(x_t(i)) + \frac{\varepsilon}{N}\sum_{j=1}^{N} f(x_t(j))$$

dinámicas locales caóticas: $f(x_t(i)) = 1.5 - |x_t(i)|^{-0.5}$

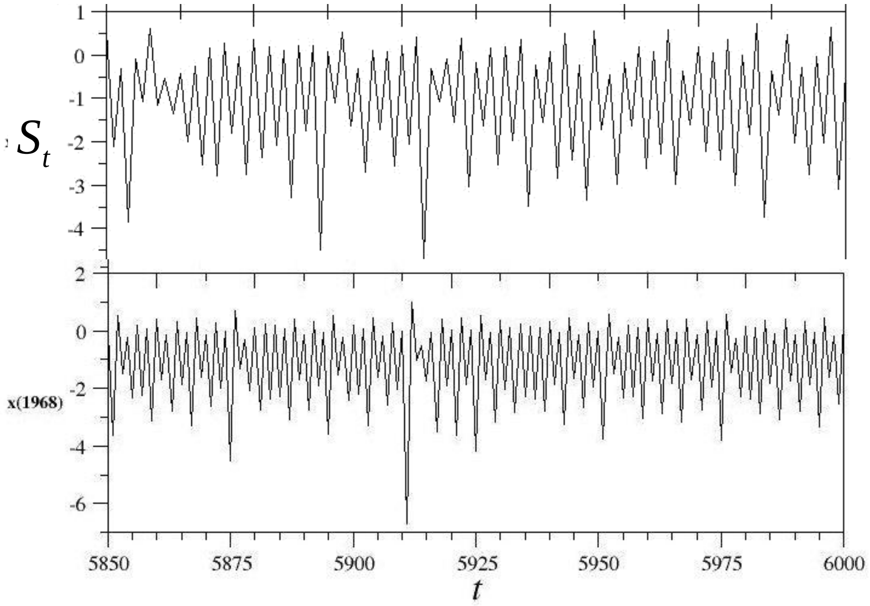
$x_0(i)$ condiciones iniciales distribuidas aleatoriamente

Caracterización del comportamiento colectivo:

Campo medio del sistema en tiempo t : $$S_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_t(i)$$

Dispersión en tiempo t : $$\sigma_t = \left[\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(x_t(i) - S_t\right)^2\right)\right]^{1/2}$$

Comportamiento incoherente, desincronizado

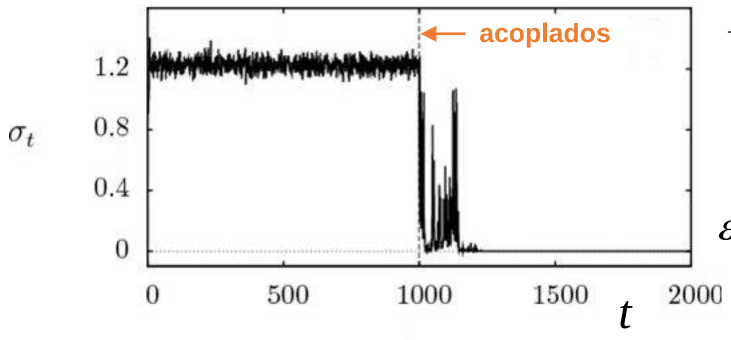


$$\varepsilon = 0.04$$

Comportamientos colectivos

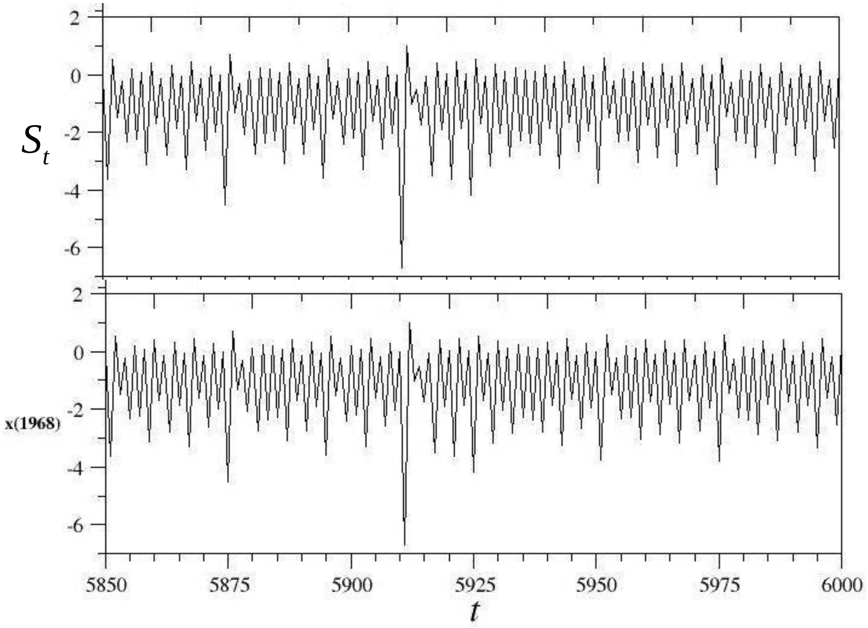
Comportamiento coherente: sincronización caótica

$$\forall i,j \quad x_t(i) = x_t(j) = S_t \Rightarrow \langle \sigma \rangle = \frac{1}{T}\sum_{t>\tau} \sigma_t \to 0$$

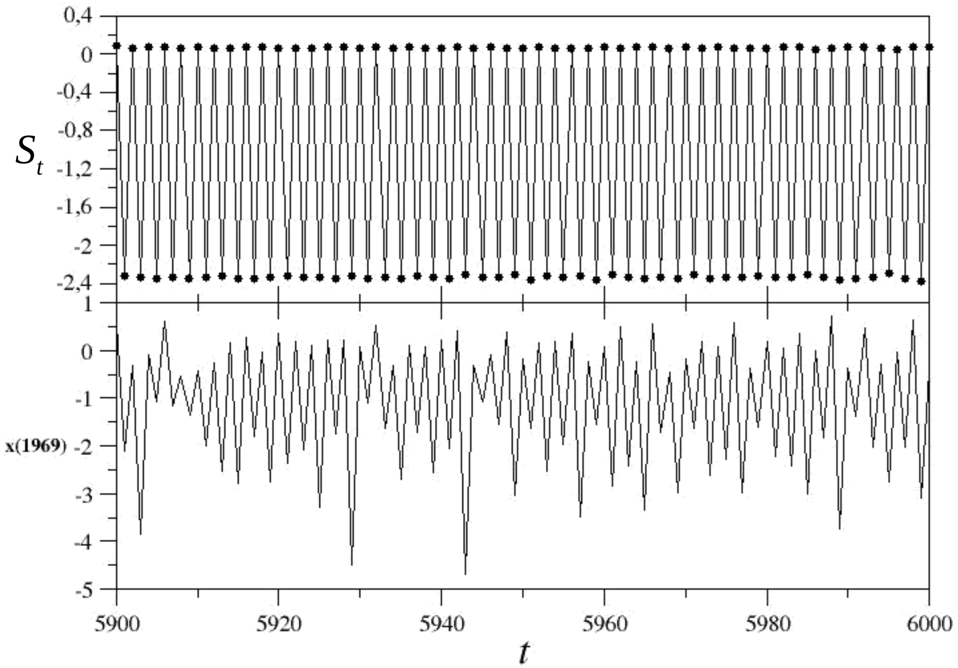


$N = 10^4$

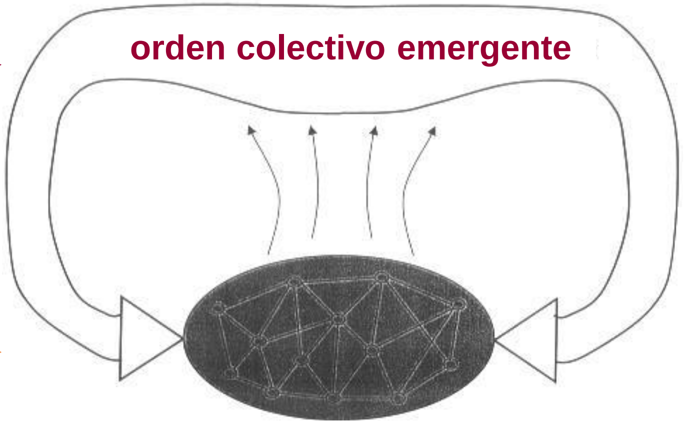
$\varepsilon = 0.4$



$\varepsilon = 0.4$



$\varepsilon = 0.1$



caos local

Comportamiento colectivo no trivial

Fluctuaciones de S_t no decrecen con aumento de N
→ periodo se hace mejor definido.

Comportamiento colectivo no trivial

PHYSICAL REVIEW LETTERS

VOLUME 65 17 SEPTEMBER 1990 NUMBER 12

Globally Coupled Chaos Violates the Law of Large Numbers but Not the Central-Limit Theorem

Kunihiko Kaneko

Institute of Physics, College of Arts and Sciences, University of Tokyo, Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153, Japan

(Received 18 June 1990)

Red de mapas globalmente acoplados:

$$x_{t+1}(i) = (1-\varepsilon) f(x_t(i)) + \frac{\varepsilon}{N}\sum_{j=1}^{N} f(x_t(j))$$

$f(x_t) = 1 - a x_t^2$ dinámica local caótica (a >1.4)

$f(x_t)\colon [-1,1] \to [-1,1]$

$$h_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_t(i)$$ campo medio del sistema en tiempo *t*

$$\langle h \rangle = \frac{1}{T-\tau}\sum_{t=\tau}^{T-\tau} h_t$$ valor medio de h_t sobre serie temporal, descartando τ transitorios

$$\mathrm{MSD} = \frac{1}{T-\tau}\sum_{t=\tau}^{T-\tau}(h_t - \langle h \rangle)^2$$ desviación cuadrática media de h_t

$$\mathrm{MSD} = \langle h^2 \rangle - \langle h \rangle^2$$

Ley de grandes números: $\mathrm{MSD} \propto N^{-1}$

log-log

$\varepsilon = 0.1$

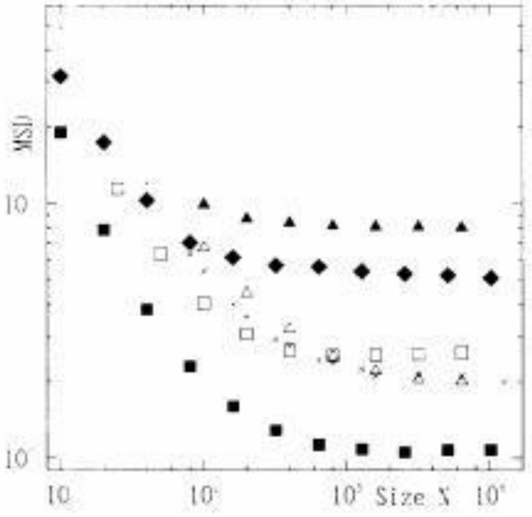


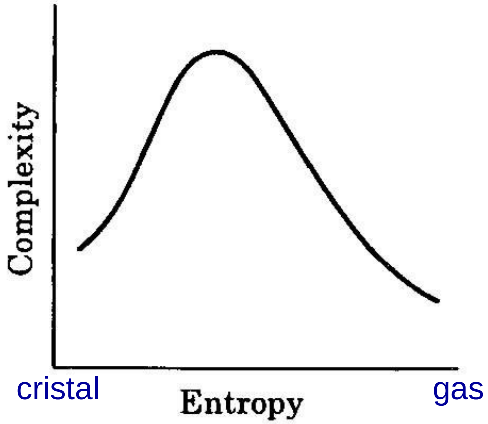
FIG. 2. Mean-square deviation (MSD) of the distribution of mean field *h*, plotted as a function of system size. The MSD is calculated over 10^5 time steps after 10^4 transients. $\epsilon = 0.1$. The parameter *a* is 1.80 (■), 1.83 (□), 1.85 (◆), 1.92 (▲), 1.95 (△), and 1.99 (×).

Una medida de la complejidad

ordenado **complejo** **aleatorio (equiprobable)**

entropía (desorden)

Q: número de estados



Complejidad ⟷ Estructuras emergentes (espacio, tiempo)

Complejidad algorítmica: mínimo número de instrucciones que generan al sistema.

Complejidad ⟷ flujo de información entre partes del sistema.

Complejidad estadística: [Lopez-Ruiz, Mancini, Calbet, Phys. Lett. A **209**, 321 (1995)]

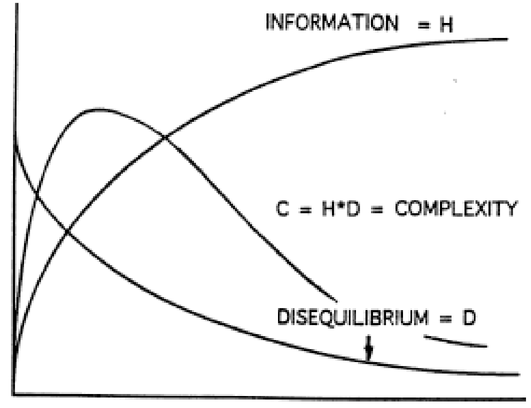
$$C = k\ H \times D$$

H = información:

$$H = -\sum_{i=1}^{Q} p_i \ln p_i$$

D = desequilibrio:

$$D = \sum_{i=1}^{N} \left(p_i - \frac{1}{Q}\right)^2$$



orden desorden

Complejidad y comportamiento colectivo

parámetro local b = 1.5

$N = 10^4$

diagrama de bifurcación:
10^3 iterados por cada valor ϵ,
descartartando 10^3 transientes

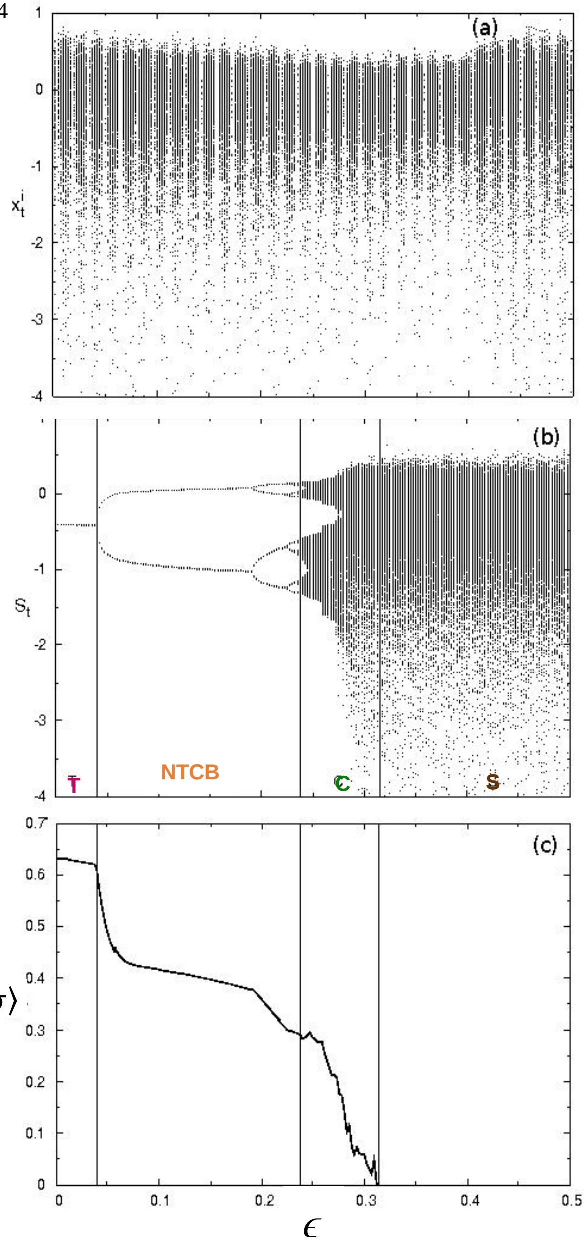
T: estado desincronizado

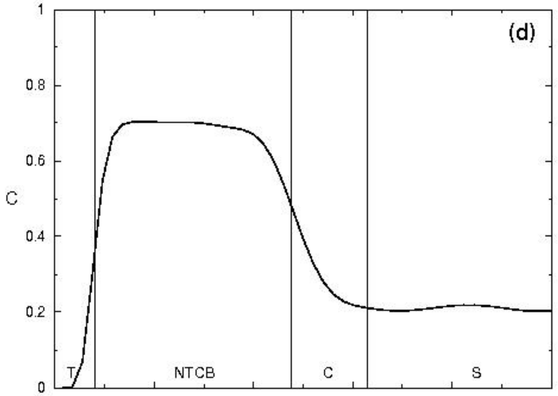
NTCB: comportamiento colectivo ordenado, no trivial

C: caos colectivo

S: comportamiento sincronizado.

Dispersión promedio para cada valor ϵ





Complejidad estadística del campo medio S_t es máxima para NTCB

C: complejidad estadística de la distribución de probabilidad del campo medio S_t

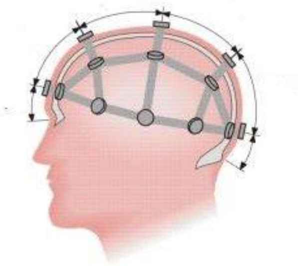
Red de mapas globalmente acoplados:

$$x_{t+1}(i) = (1-\varepsilon) f(x_t(i)) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x_t(j))$$

$$f(x_t(i)) = 1.5 - |x_t(i)|^{-0.5}$$

M. Escalona-Morán, M.G. Cosenza, G. Paredes, IJAMAS **26**, 58 (2010).

Complejidad de señales EEG



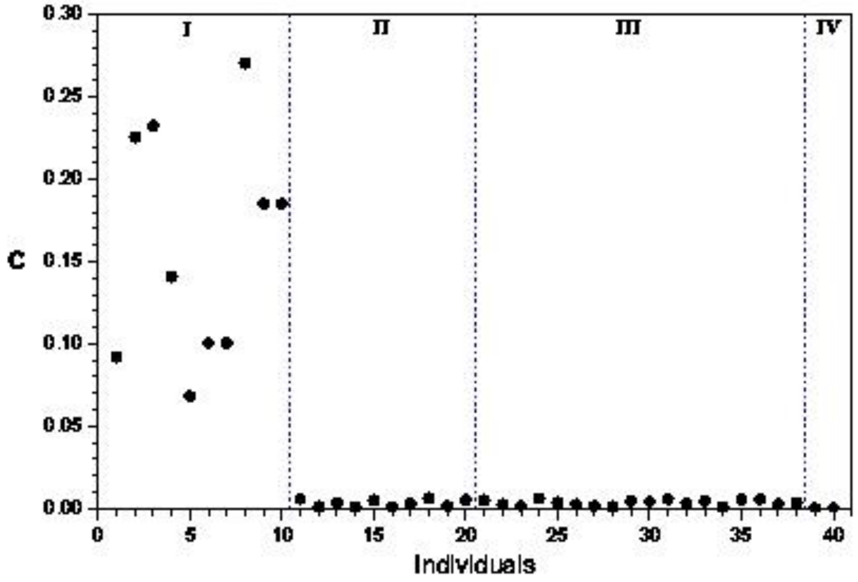
EEG: 19 canales (electrodos)

$x_t(i)$**:** señal del canal i en tiempo t

Campo medio de un EEG en tiempo t:

$$S_t = \frac{1}{19}\sum_{i=1}^{19} x_t(i)$$

Base de datos:
I sujetos sanos: 10
II pacientes epiléticos con tratamiento: 10
III pacientes epílépticos sin tratamiento: 18
IV pacientes epilépticos durante una crisis: 2



Epilepsia: mayor grado de sincronización (estudios previos).

M. Escalona-Morán, M.G. Cosenza, R. Lopez-Ruiz, P. García, IJBC **20**, 1723 (2010).

http://laconga.redclara.net

contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.