Clase 20:
Explorando Sistemas No Lineales

Mario Cosenza

Módulo de Instrumentación

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

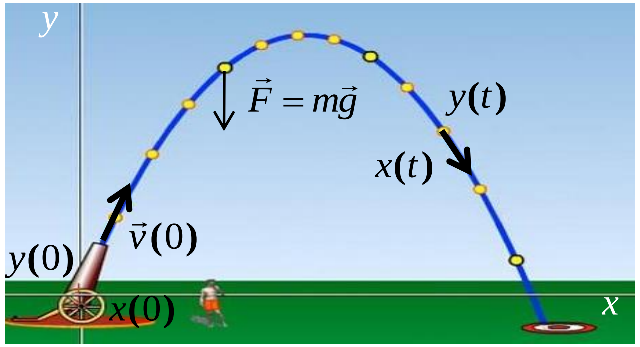
Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

Sistemas dinámicos deterministas

Ciencia: fenómenos naturales se pueden comprender como relaciones *causa-efecto*.
Relaciones se expresan en lenguaje matemático: ecuaciones, reglas, funciones.
Sistemas físicos, biológicos, químicos, económicos , etc.

Ejemplo: Mecánica Clásica.
Leyes de Newton para el movimiento.

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$



Conociendo posición inicial (x(0), y(0)) y velocidad inicial (v_{ox}, v_{oy}), trayectoria (x(t), y(t)) está determinada.

Regla determinista: operación que permite calcular el estado de un sistema en un tiempo posterior a partir del conocimiento de su estado en un tiempo anterior**.**
Regla: *t* continuo, *t* discreto, algoritmo.

$\boldsymbol{x(t)}$ **:** Conjunto de variables del estado del sistema en el tiempo *t.*

antes $\quad$ después

$$x(t) \xrightarrow{\boldsymbol{R}} x(t+\tau)$$

Sistemas lineales vs. no lineales

Lineal: suma de las causas = suma de los efectos. Principio de superposición: si x(t) y y(t) son soluciones, entonces x(t)+y(t) es solución.

No lineal: efecto no es proporcional a la causa. No se cumple principio de superposición: $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$

Sistemas lineales: existen métodos generales para encontrar soluciones en términos de funciones u operaciones elementales: polinomios, exponenciales, trigonométricas. Soluciones son regulares, periódicas, suaves.

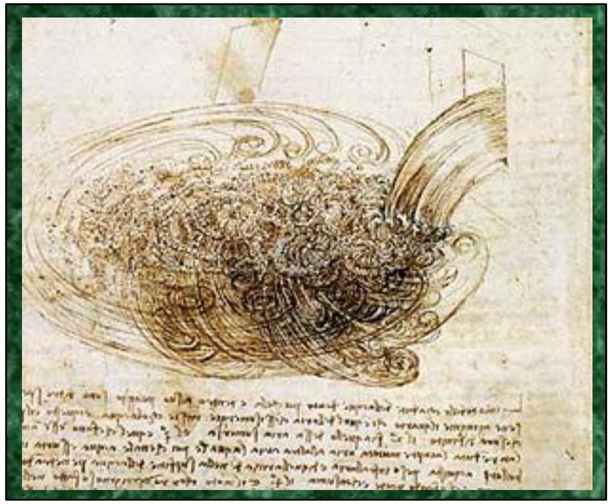
Sistemas no lineales: no hay métodos generales; soluciones son particulares; comportamiento es irregular.
En general, soluciones se obtienen por métodos numéricos, computacionales, o experimentales.

Sistemas no lineales son mayoría en la naturaleza.

Ejemplo clásico: turbulencia en fluidos, impredecible en tiempo y espacio.

“Hay un problema físico que es común en muchos campos, que es muy antiguo y que no ha sido resuelto: es el problema de la turbulencia”.

Richard Feynman, *Lectures on Physics* (1963).



Espacio de fase

Estado de muchos sistemas se puede describir mediante un conjunto de *N* variables reales (posición, velocidad, presión, densidad, temperatura, etc)

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(x_1(t), x_2(t) \cdots, x_N(t)\right) \in U \subset \mathbb{R}^N$$

Espacio de fase: espacio euclideano *N*-dimensional *U* donde cada coordenada x_i representa una variable del sistema.
Evolución del sistema se puede ver como un cambio del vector ***x***(t) (análogo a posición) en su espacio de fase.

La evolución de muchos sistemas dinámicos se pueden describir mediante ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \lambda) \qquad \text{donde} \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) = (f_1\,(x_1(t)), f_2(x_2(t)) \cdots, f_N(x_N(t))) \qquad \lambda\text{: parámetros.}$$

Equivalente a sistema de *N* ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_N) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_N) \\ &\vdots \\ \dot{x}_N &= f_N(x_1, x_2, \cdots, x_N) \end{aligned}$$

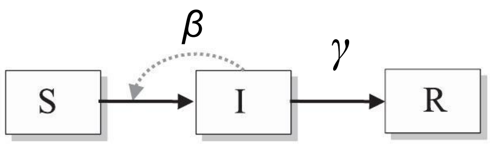
En general, una ecuación diferencial de orden N se puede expresar como N ecuaciones diferenciales de primer orden.

Solución ***x***(t) determinada por condiciones iniciales: $\boldsymbol{x}(0) = \left(x_1 0, x_2(0) \cdots, x_N(0)\right)$ Si f_i son no lineales, comportamiento de ***x***(t) depende de parámetros.

Solución estacionaria o punto fijo : $\dfrac{d\boldsymbol{x}^*}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*, \lambda) = 0$

Ejemplo: modelo SIR de epidemia

N = tamaño de la población. S = fracción de individuos susceptibles. I= fracción de individuos infectados. R= fracción de recuperados.



$$\frac{dS}{dt} = -\beta S I,$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S I - \gamma I,$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I.$$

β = tasa de transmisión de I a S.
γ = tasa de recuperación.

S+I+R= cte.

Epidemia no se propaga si $\frac{dI}{dt}(0) < 0 \Rightarrow S(0) < \frac{\gamma}{\beta}$

Tasa de reproducción básica: $R_0 \equiv \frac{\beta}{\gamma}$

Epidemia no se propaga si $S(0) < 1/R_0$

Condición umbral: epidemia se propaga si $S(0)=1 \rightarrow R_0 > 1$.

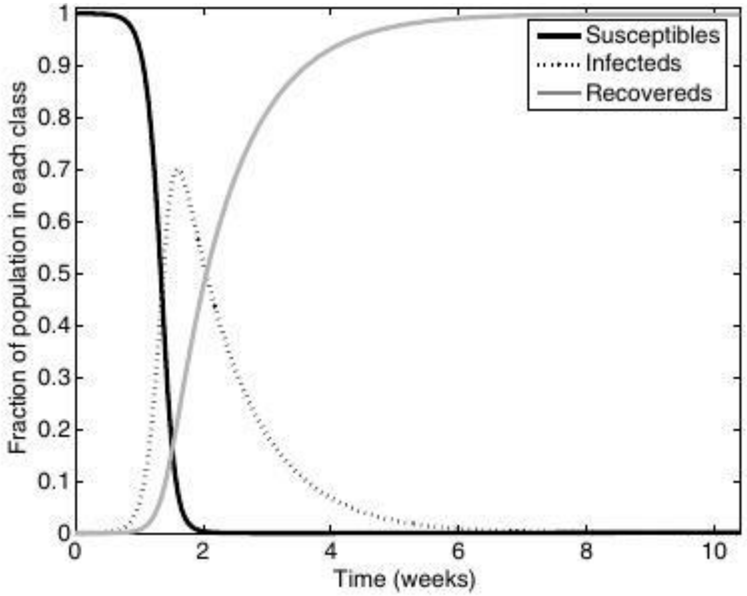


Figure 2.1. The time-evolution of model variables, with an initially entirely susceptible population and a single infectious individual. The figure is plotted assuming $\beta = 520$ per year (or 1.428 per day) and $1/\gamma = 7$ days, giving $R_0 = 10$. (See the following pages for a definition of the crucial

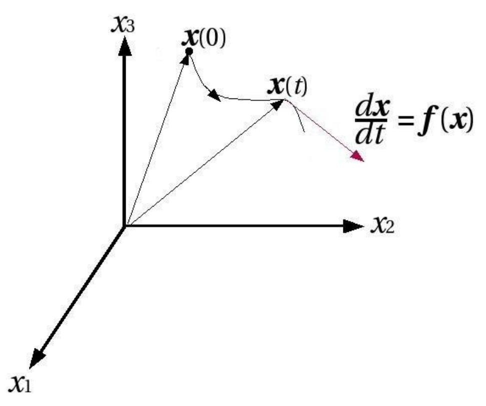
Ejemplo: Ecs. de Hamilton, sistema mecánico con s grados de libertad:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad i = 1,2,\ldots,s.$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Teorema de existencia y unicidad

Considere un sistema dinámico $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ definido en un subespacio $U \subset \mathbb{R}^N$



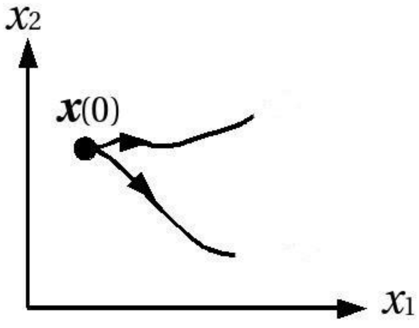
tal que ***f***(***x***) satisface la *propiedad de Lipschiptz:* $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})| \leq k|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$

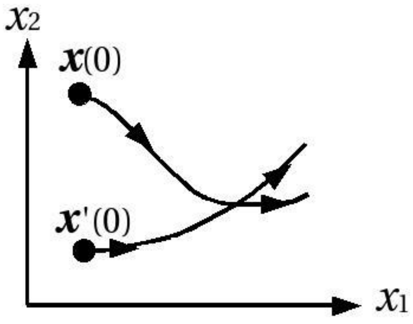
para algún k < ∞, donde $|\boldsymbol{x}| = \left(\boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2 + \cdots + \boldsymbol{x}_N^2\right)^{1/2}$

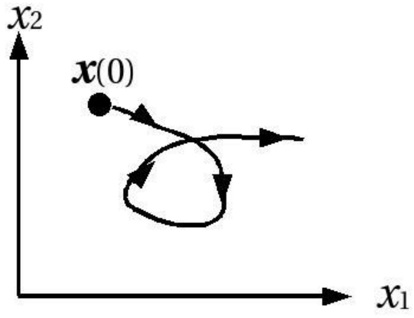
Dada un condición inicial $\boldsymbol{x}(0) \in U$,

existe una solución única x(t) que satisface el sistema para *t* ϵ (0, τ) que pasa por ***x***(0).

Situaciones prohibidas por el Teorema de unicidad en el espacio de fase:





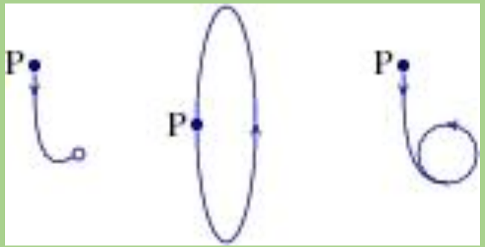


Atractor: estado dinámico asintótico en espacio de fase.

Teorema de Poincaré-Bendixson

Los únicos estados asintóticos posibles en un espacio de fase bidimensional son puntos fijos o ciclos límite (trayectorias periódicas, cerradas).

Consecuencia del Teorema de unicidad.



Ejemplo: oscilador armónico simple, *s* = 1 grado de libertad *q*.

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$

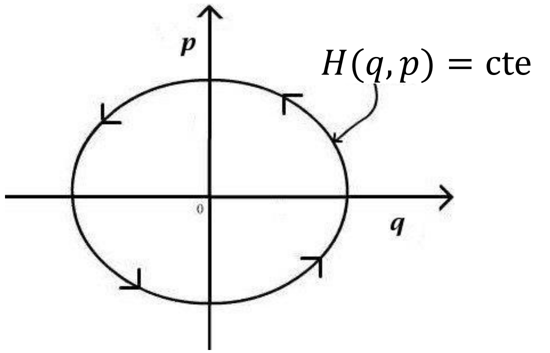
Ecs. de Hamilton:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq$$

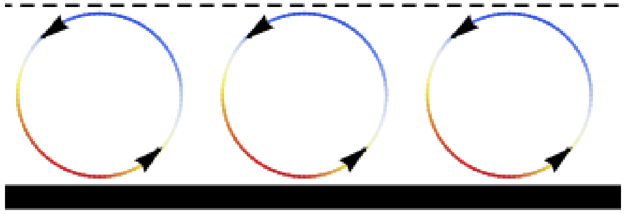
$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Longrightarrow H(q,p) = \text{cte}$$

Espacio de fase:



Sistema no lineal: Ecuaciones de Lorenz

Edward Lorenz (1963):
modelo simplificado de corrientes de convección en la atmósfera.



Ecuaciones de Lorenz:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + ay$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - xz - y$$

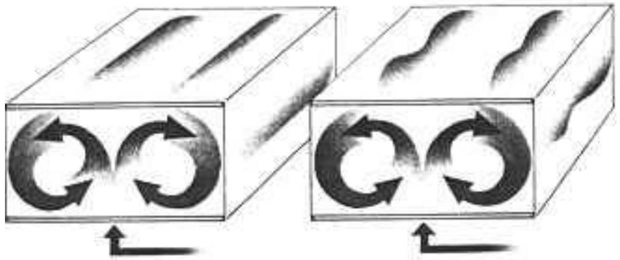
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

Variables de estado del sistema:

x: velocidad de convección
y: temperatura en dirección longitudinal
z: temperatura en dirección vertical

Parámetros:

a: conductividad térmica
b: factor geométrico
r: número de Rayleigh

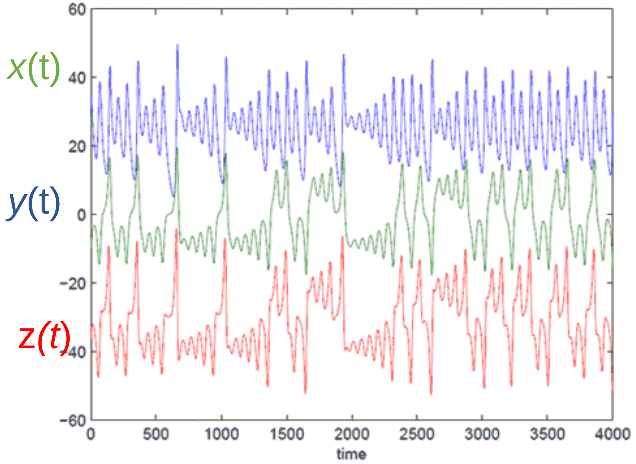


$r < r_c$
periódico

$r > r_c$
irregular

Solución numérica:
parámetros fijos, $r > r_c$,
dados valores iniciales $x(0)$, $y(0)$, $z(0)$

Computador Royal McBee

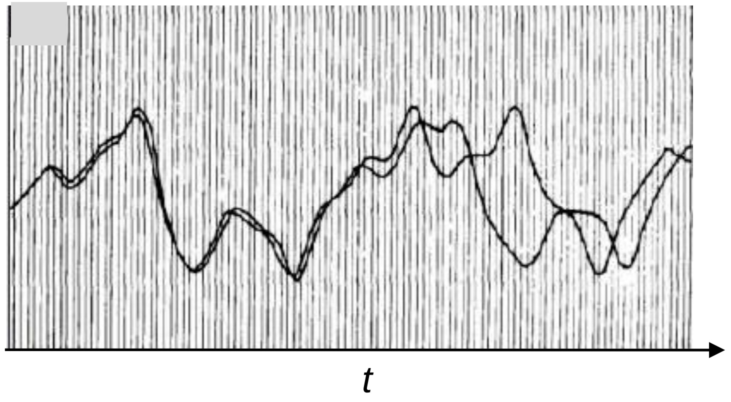


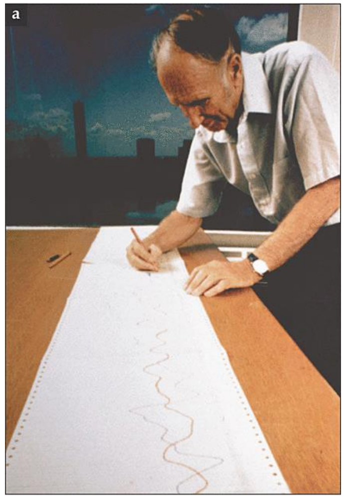
El efecto mariposa: descubrimiento del caos

Caos: sensibilidad extrema de la trayectoria ante pequeños cambios en las condiciones iniciales

$x(0)$= 5.061271
$x'(0)$=5.06127

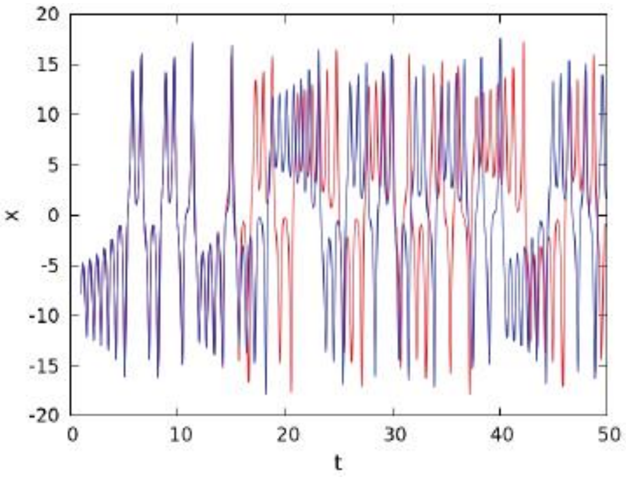
$$\Delta x(0) = 10^{-6}$$





E. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow,* Journal of Atmospheric Sciences **20**, 130 (1963).

- Perturbación inicial → clima impredecible a largo plazo.
- Comportamiento genérico en sistemas de ecuaciones no lineales.



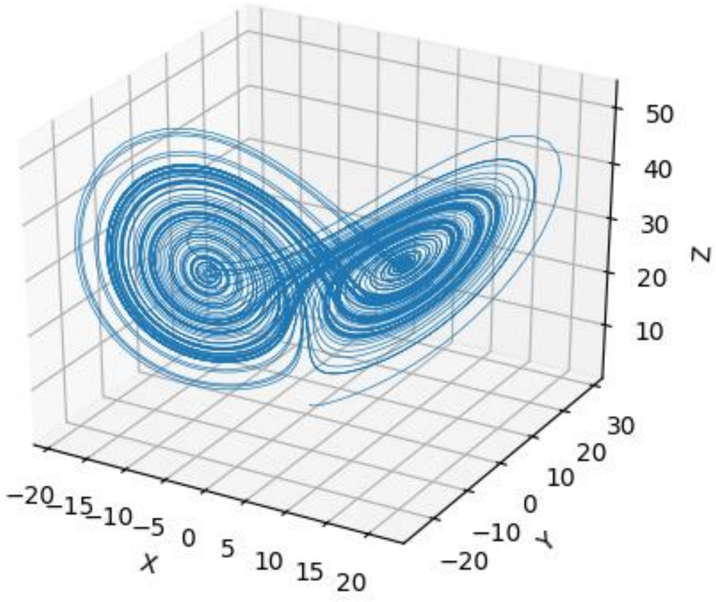
Condiciones iniciales de trayectorias rojo y azul difieren en 10^{-12}:

"Does the flap of a butterfly's wing set off a tornado in Texas?"
Titulo de una charla de Lorenz en una conferencia en 1972.

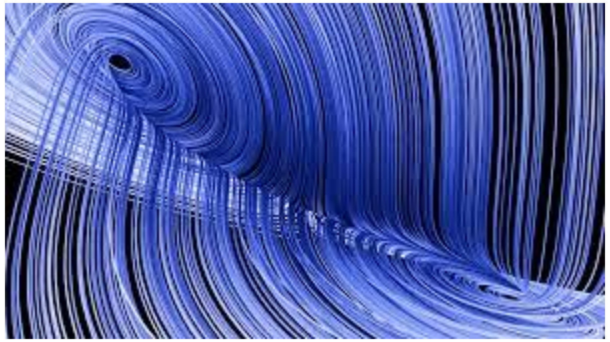
Tema literario, arte, cine, cultura.

Atractor de Lorenz

Solución en espacio de variables x,y,z: “atractor extraño”

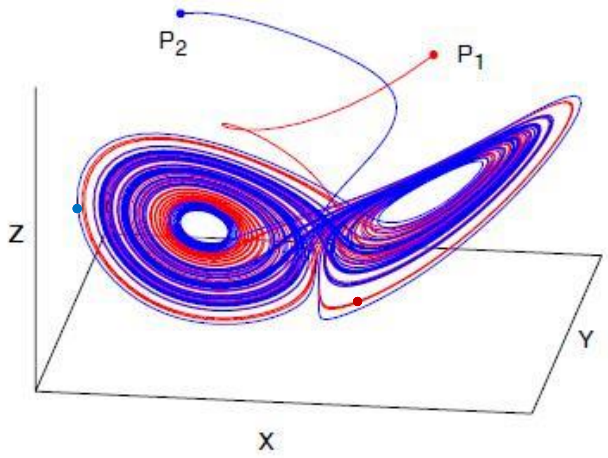


Magnificación



Atractor “extraño” posee geometría fractal.

Distintas condiciones iniciales recorren el atractor en forma diferente.

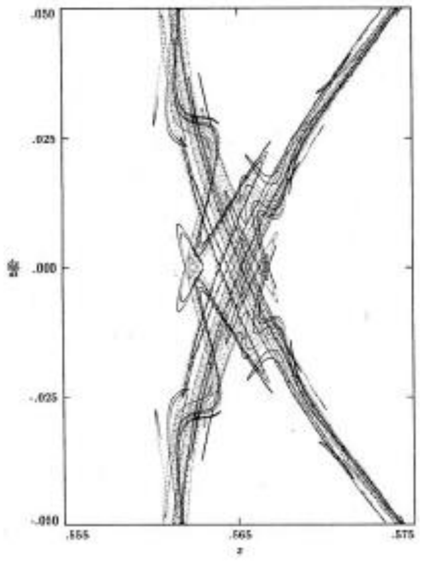


¡Lorenz pasó desapercibido por 12 años!

El nombre *“caos”* aparece por primera vez:

T. Y. Li, J. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly **82**, 985 (1975).

La increíble visión de Poincaré



Henri Poincaré estudió la estabilidad del sistema solar;
en particular el problema gravitacional de 3 cuerpos:

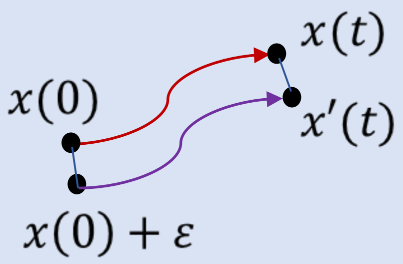
“Puede suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales conduzcan a grandes diferencias en los resultados finales. La predicción se vuelve imposible”.

“Cada curva nunca se intersecta a sí misma, sino que se pliega sobre sí misma de un modo muy intrincado. Uno se queda atónito frente a la complejidad de esta forma, la cual no intentaré siquiera dibujarla”.

Les Méthodes Nouvelles de la Mecanique Céleste (1903).

Comportamiento de sistema no lineal puede experimentar grandes cambios al variar un parámetro:

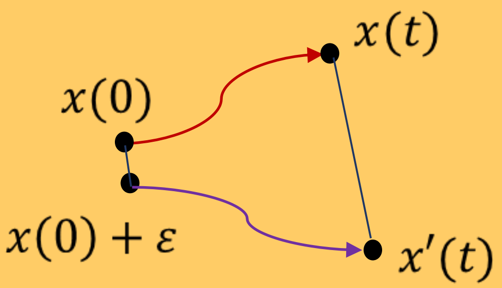
Regular, predecible



ε: pequeña perturbación de condición inicial

parámetro

CAOS:
Sensibilidad extrema de la evolución de un sistema determinista no lineal ante perturbaciones de sus condiciones iniciales.



- **No viola el Teorema de Unicidad: determinismo implica predicción.**
- **Predicción no es estable.**

Sistemas dinámicos con tiempo discreto

Mapas o funciones iterativas son sistemas dinámicos deterministas:

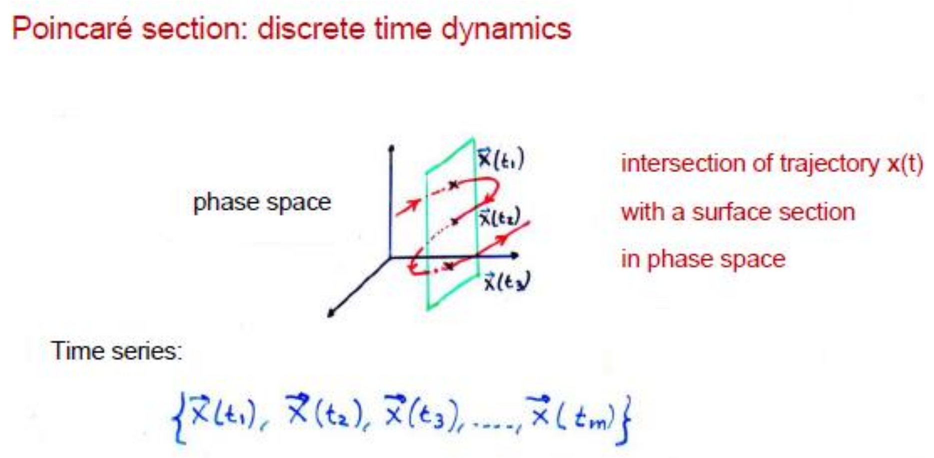
$x_{n+1} = f(x_n, r)$ $\qquad n = 0,1,2\ldots$ $\qquad r$ = parámetro

Secuencia de iterados para un valor *r* fijo:

Dado $x_0 : \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to \cdots \to x_n$

trayectoria u órbita con tiempo discreto.

Aparecen en muchos contextos:
- Series de tiempo experimentales son generalmente discretas;
- Integración numérica.

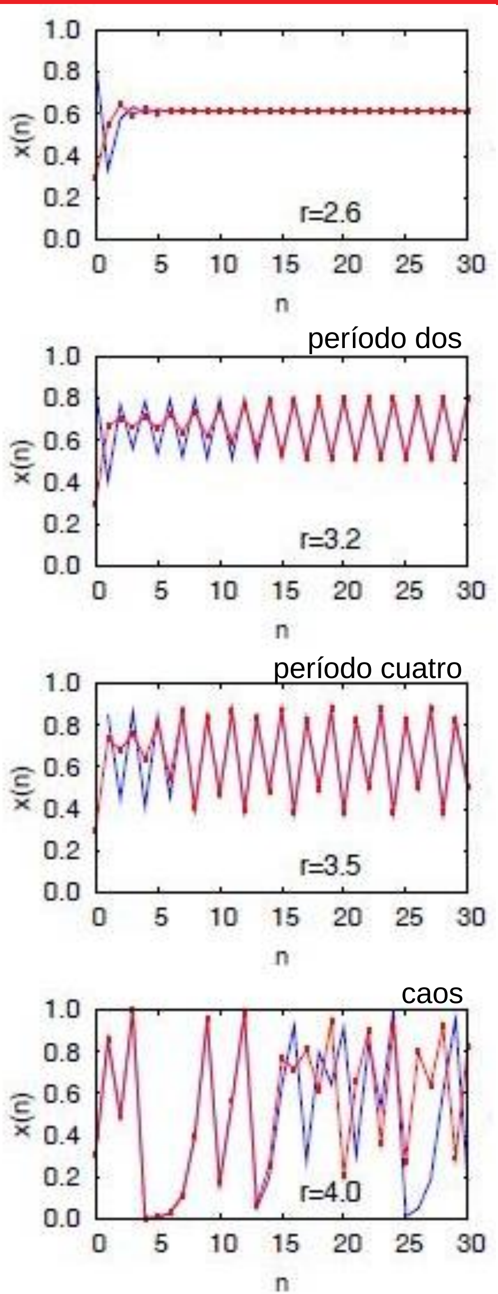


Ejemplo:
mapa logístico
(modelo de crecimiento
de poblaciones con
recursos limitados).

$$x_{n+1} = f(x_n) = r x_n (1 - x_n)$$

$$x_n \in [0,1]$$

Condiciones iniciales
rojo y azul difierentes



Resumen

Sistema dinámico determinista: $x(t) \xrightarrow{\boldsymbol{R}} x(t+\tau)$ Dado x(o), evolución está determinada para t > 0.

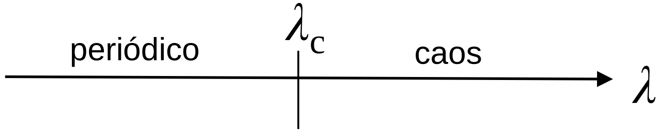
R: ecuaciones diferenciales, funciones, mapas, algoritmo, instrucciones. *t*: continuo, discreto. **R** puede depender de parámetros λ.

R $\begin{cases} \text{lineal} \\ \text{no lineal} \end{cases}$

- lineal → evolución regular, periódico, punto fijo, predecible, solución analítica (en general).
- no lineal → evolución puede ser irregular, impredecible, caótico (sensible a pequeños cambios en condiciones iniciales).

Propiedades de sistemas no lineales:

1) Comportamientos dinámicos distintos al variar λ (bifurcaciones). *Puede* existir valor crítico λ_c para transición orden-caos.



2) $\lambda > \lambda_c$ comportamiento caótico.

- No linealidad: condición necesaria, pero no suficiente para caos.
- Teorema Poincaré-Bendixson (t continuo) → dimensión espacio de fase > 2 para caos.

http://laconga.redclara.net

contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.