Clase 21:
Límites de la predicción

Mario Cosenza

Módulo de Instrumentación

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

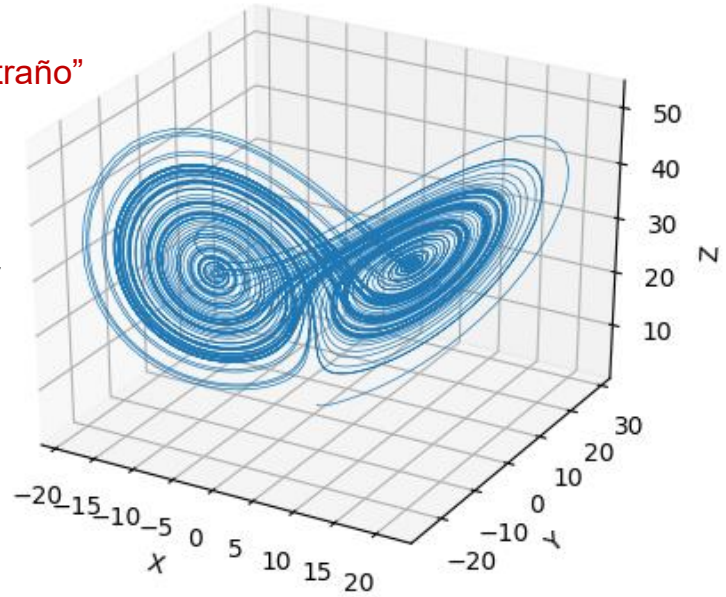
Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

Atractores extraños de sistemas cáoticos

Solución ***x***(t)=((*x*(t), *y*(t), *z*(t)) en espacio de fase

atractor “extraño”

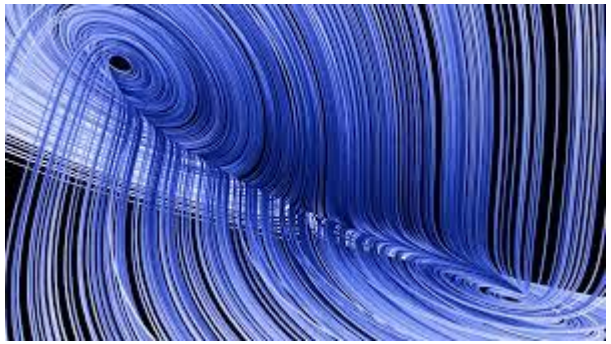
$a = 10$
$r = 28$
$b = 2.67$



Ecs. Lorenz

$$\frac{dx}{dt} = -ax + ay$$
$$\frac{dy}{dt} = rx - xz - y$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

Magnificación

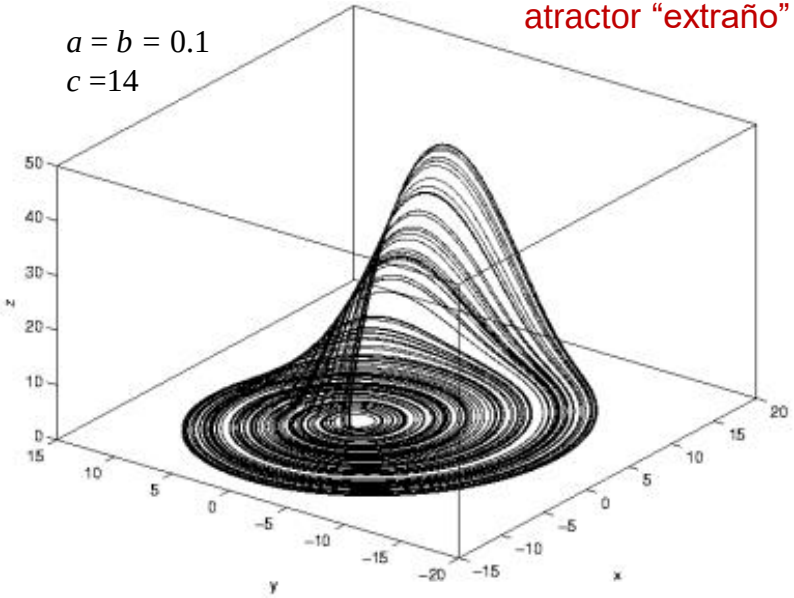


Ecs. Rössler

$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$
$$\frac{dy}{dt} = x + ay$$
$$\frac{dz}{dt} = b + z(x - c)$$

atractor “extraño”

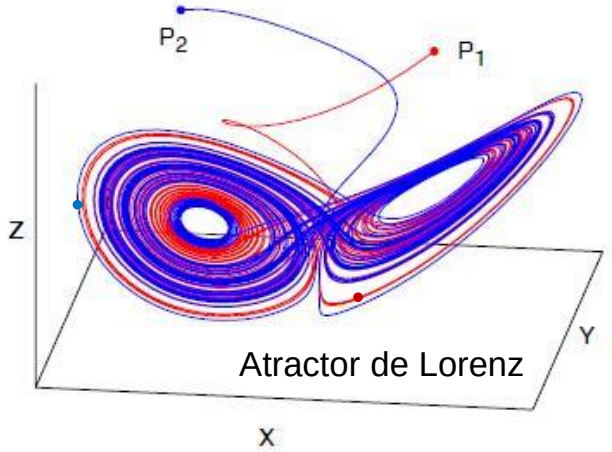
$a = b = 0.1$
$c = 14$

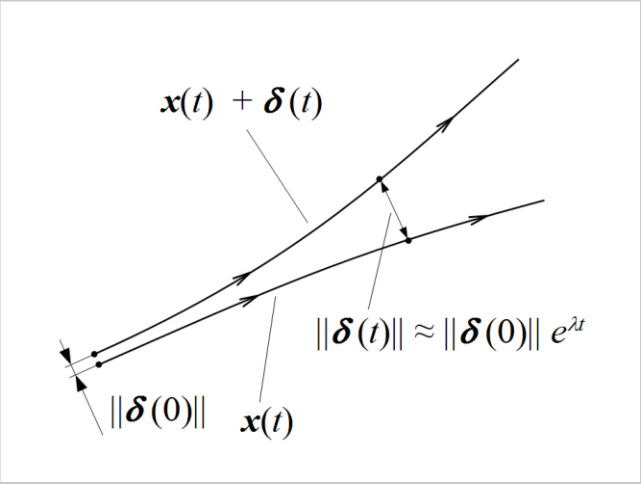


Atractor “extraño” posee *geometría fractal* (estructuras recurrentes bajo cambio de escala).

Separación exponencial de las trayectorias

Distintas condiciones iniciales se separan y recorren el atractor en forma diferente.





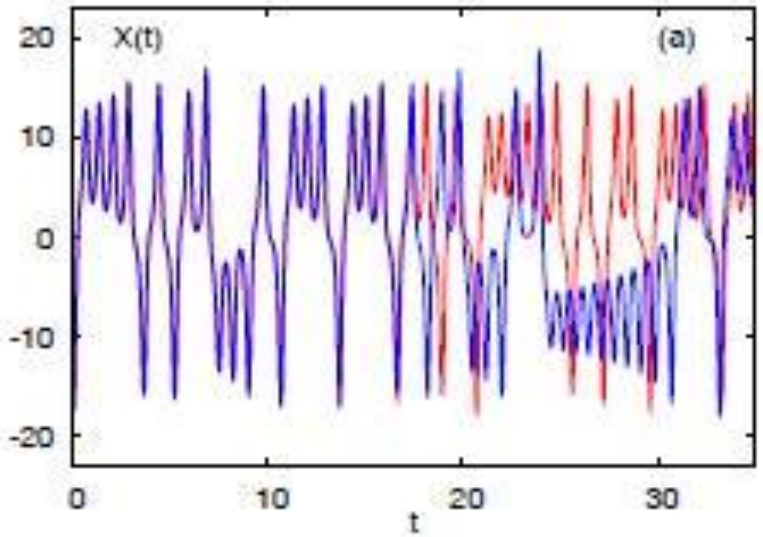
Separación crece exponencialmente:

$$\delta(t) \propto e^{\lambda t}$$

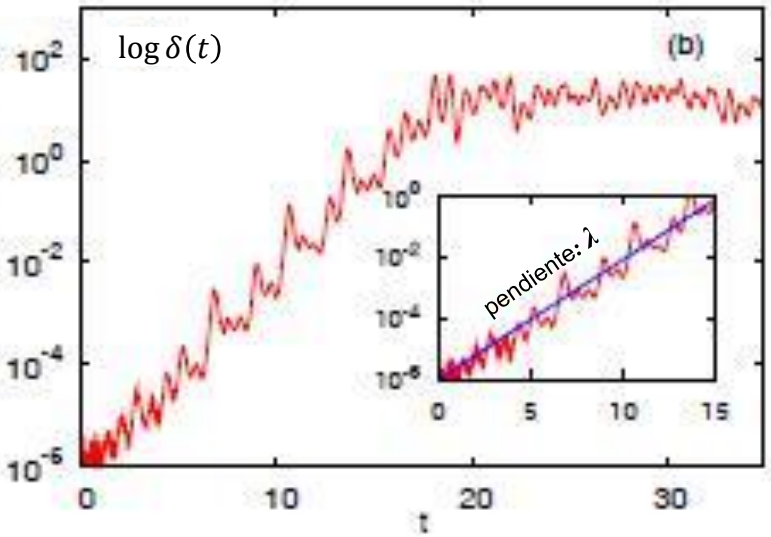
hasta alcanzar el tamaño del atractor.
Separación varía en el tiempo.
En promedio para tiempos largos, separación aumenta: $\lambda > 0$.

λ : **Exponente de Lyapunov.**

Condiciones iniciales $P_1 \approx P_2$ $\delta(0)=10^{-6}$



semilog graph δ(t) vs. t



Exponente de Lyapunov

$\lambda > 0$: caótico.
$\lambda < 0$: periódico o punto fijo.

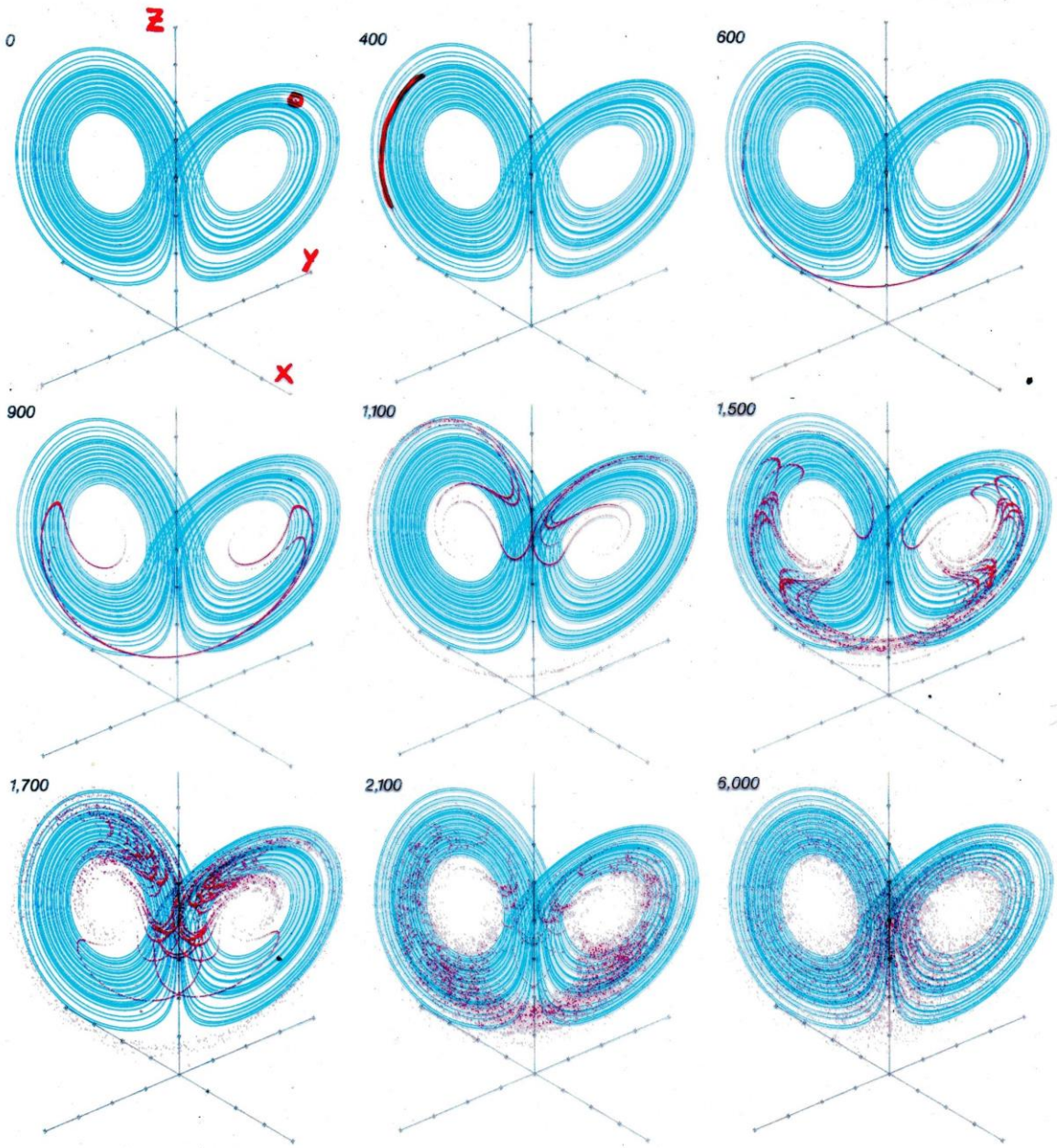
$1/\lambda$: horizonte de predicción, tiempo de predictibilidad

Expansión y plegamiento

Atractor de Lorenz

- Ensemble (volumen) de condiciones iniciales

Imágenes de la evolución de trayectorias sobre el atractor para distintos tiempos



Además de separación de trayectorias, ocurre *plegamiento*; trayectorias se distribuyen sobre el atractor formando líneas y estructuras a escalas cada vez mas pequeñas, sin intersección.
→ estructura fractal.

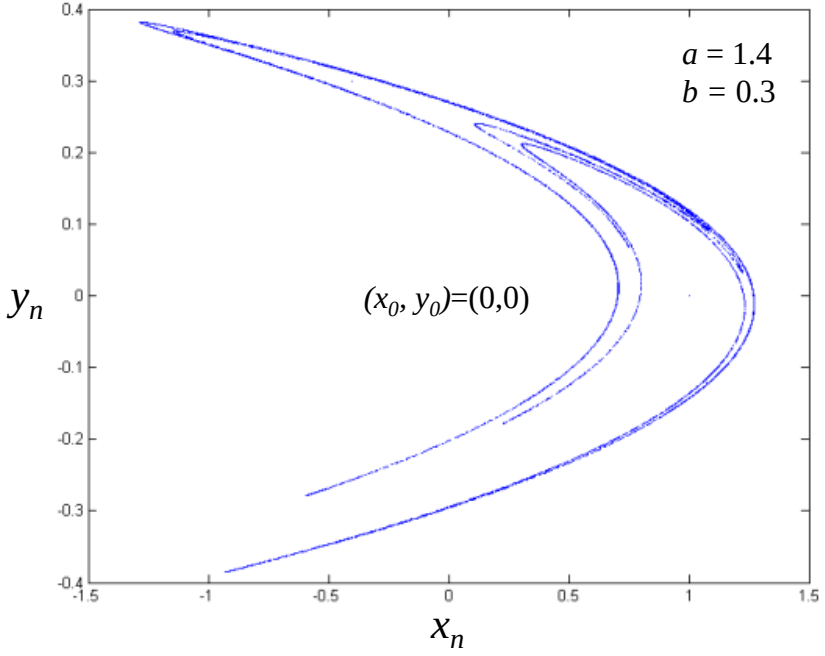
Estructura fractal

Mapa de Henón (bidimensional)

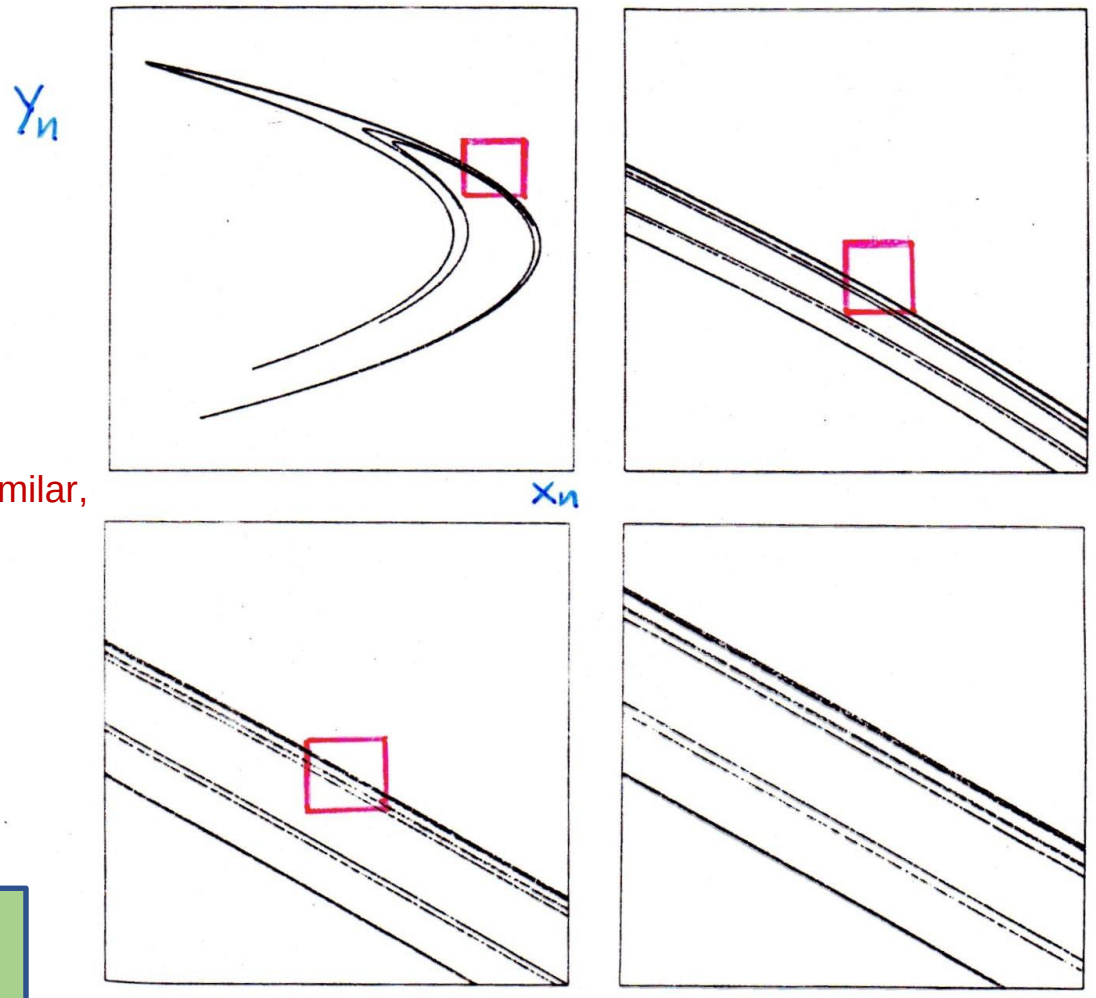
$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n$$

$$y_{n+1} = bx_n$$

Atractor de Henón



Magnificaciones sucesivas:

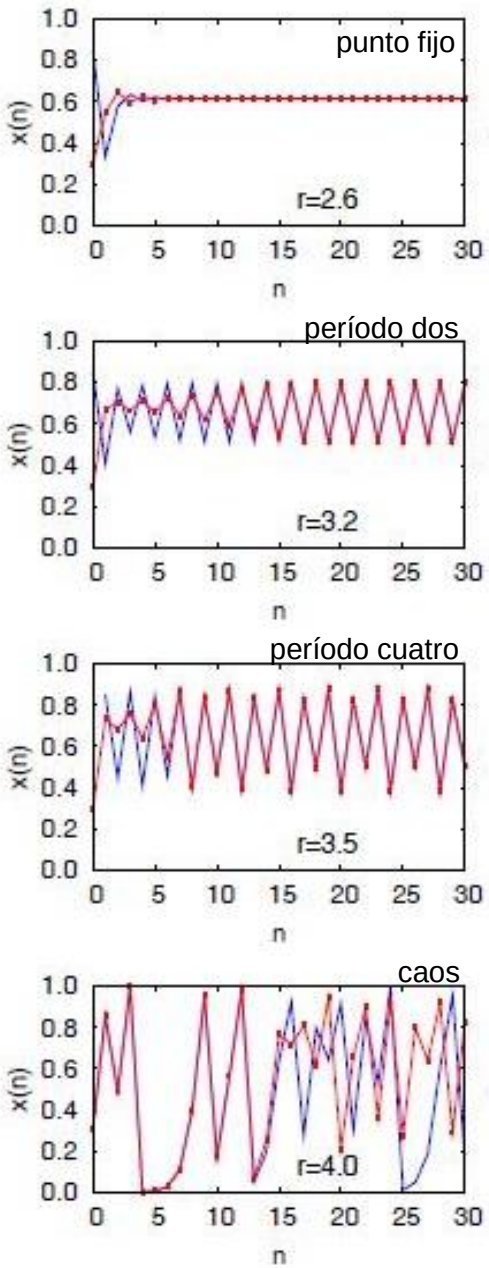


Estructura auto-similar, *geometría fractal*

Propiedades de atractores extraños:

- Separación exponencial de trayectorias en alguna dirección.
- Plegamiento de trayectorias.
- Estructura fractal

Dependencia de parámetros: diagrama de bifurcación



Comportamiento dinámico del sistema depende de parámetros.

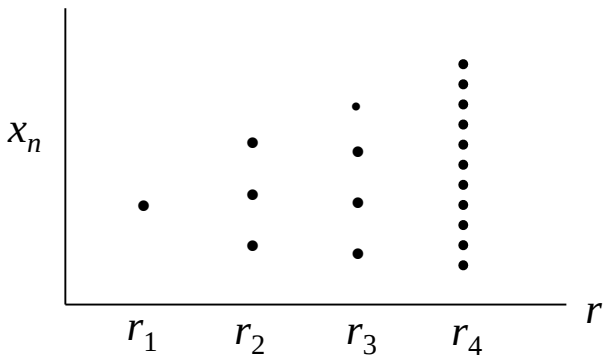
$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1-x_n) \qquad x_n \in [0,1] \qquad r = \text{parámetro}$$

Secuencia de iterados (órbita) para un valor *r* fijo: $x_0 : \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n$ $\quad n$ grande

Diagrama de bifurcación: gráfico de la órbita asintótica en función de *r* .

<u>Algoritmo</u>:

1. Dado r, obtener órbita a partir de x_0: $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n$
2. Descartar *m* puntos transitorios → órbita asintótica para r: $\{x_{m+1}, \cdots, x_n\}$
3. Para sucesivos valores r, obtener $\{x_{m+1}, \cdots, x_n\}$
4. Graficar $\{x_{m+1}, \cdots, x_n\}$ vs. *r*.



n-m puntos para cada *r*.

r_1 : todos los puntos son iguales → punto fijo.

r_2 : periodo 3. r_3 : period 4.

r_4 : caos (puntos no se repiten).

Diagramas de bifurcación: ejemplos

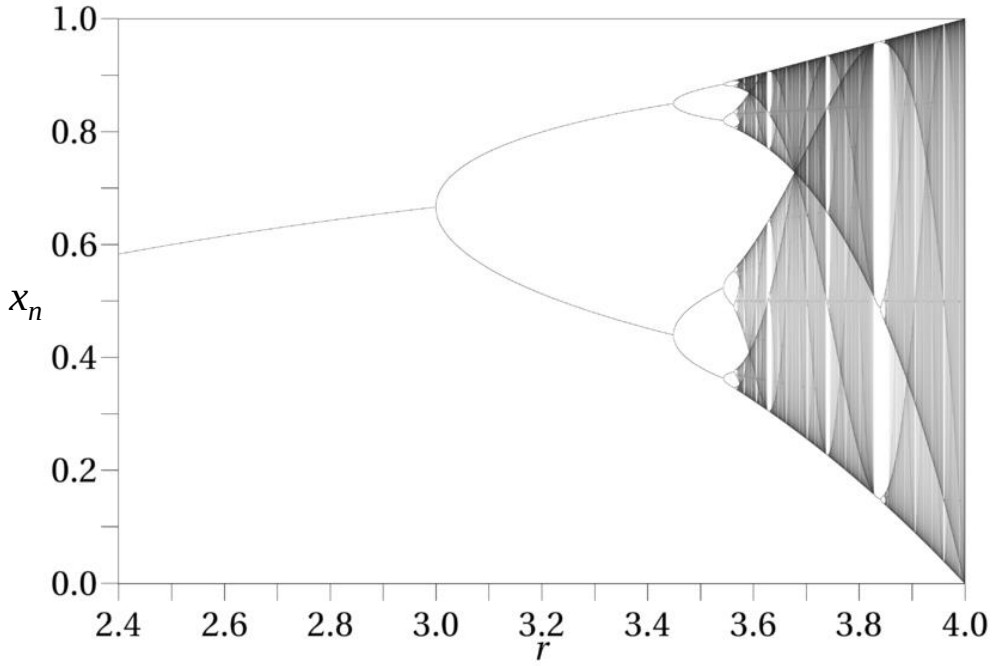
mapa logístico

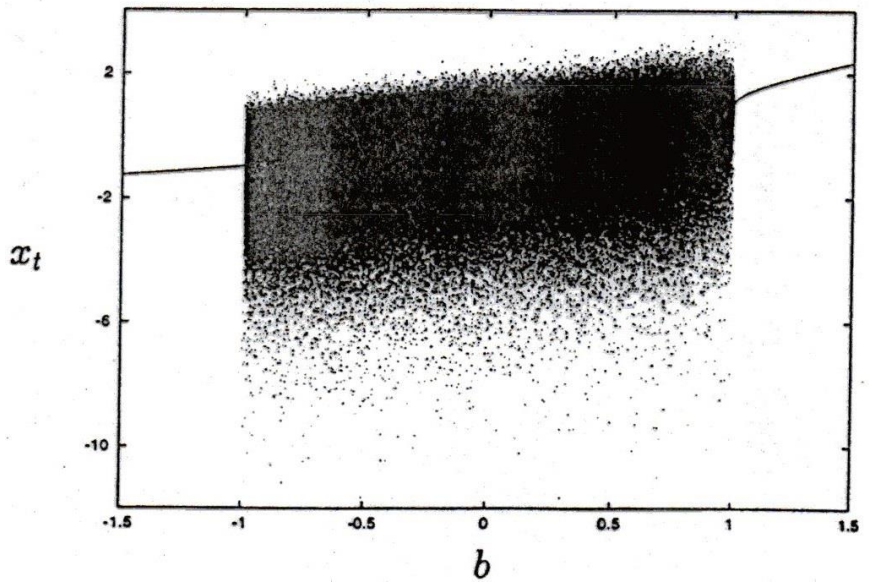
$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1-x_n)$$

Bifurcación: cambio de comportamiento dinámico al variar parámetro

secuencia de órbitas periódicas: $1,2,2^2,2^3,2^4$ para $r < 3.569$ ...

caos y ventanas de periodicidad para *r* >3.569…





mapa logarítmico

$$x_{n+1} = b - \ln|x_n|$$

caos para *b* ϵ [-1,1]

Exponente de Lyapunov para mapas

Estabilidad de las órbitas

$$x_{n+1} = f_r(x_n)$$ mapa unidimensional, *r* parámetro

$x_0,\ f(x_0),\ f^{(2)}(x_0),\ \dots \rightarrow$ órbita

$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots \qquad x_n \equiv f^{(n)}(x_0)$ (notación)

error relativo después 1 iteración: $E_1 = \left| \dfrac{f(x_0+\epsilon) - f(x_0)}{\epsilon} \right|$

$E_1 < 1$ estable, $E_1 > 1$ inestable

n iteraciones: $E_n = \dfrac{\Delta x_n}{\epsilon} = \left| \dfrac{f^{(n)}(x_0+\epsilon) - f^{(n)}(x_0)}{\epsilon} \right|$

$$\underset{\epsilon \to 0}{E_n} = \left| \frac{df^{(n)}(x_0)}{dx} \right| = \left| \frac{df(x_0)}{dx} \cdot \frac{df(x_1)}{dx} \cdot \frac{df(x_2)}{dx} \cdots \right|$$

(regla cadena)

separación relativa promedio por iteración: $\dfrac{E_n}{n}$ $\begin{cases} < 1, & \text{estable} \\ > 1, & \text{inestable} \end{cases}$

separación exponencial: $E_n \sim e^{\lambda n}$

Exponente de Lyapunov

$$\lambda(x_0) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(E_n\right)$$

$$\lambda(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{df^{(n)}(x_0)}{dx} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \left| f'(x_i) \right|$$

$\lambda < 0$, estable $\rightarrow$ órbita periódica

$\lambda > 0$ inestable, $\rightarrow$ caos

- práctica: x_0 después de transitorios.

Cálculo del exponente de Lyapunov: ejemplos

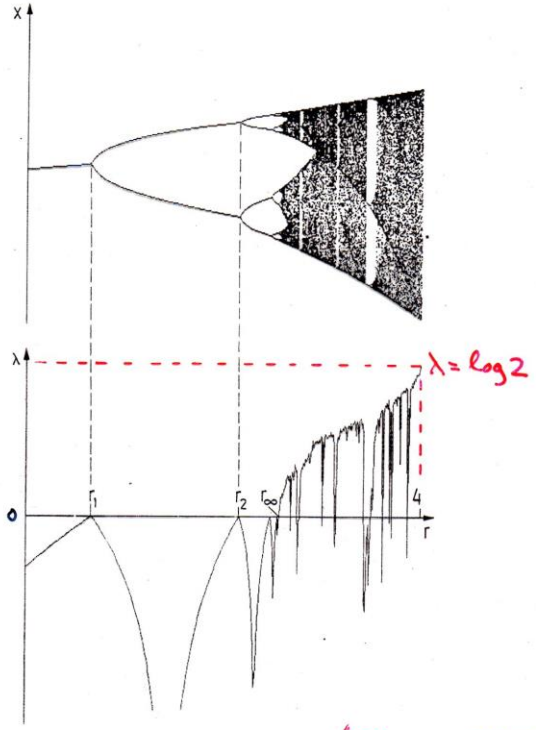
Exponente de Lyapunov en función de r (logístico)

$$\lambda(r) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log |f_r'(x_i)|$$

$$f_r'(x_i) = r(1-2x_i)$$

$\lambda(r) < 0 \Rightarrow$ órbita periódica estable, $r < r_\infty = 3.56\ldots$

Para $r > r_\infty$, existen ventanas de periodicidad entre región caótica



Exponente de Lyapunov: mapa logarítmico.

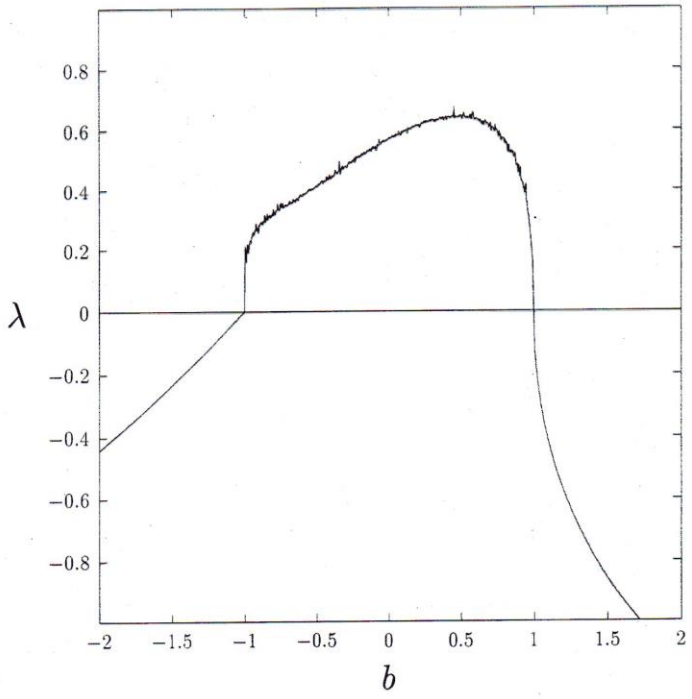
$$\lambda \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

- mapa Logarítmico:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left|\frac{1}{x_i}\right| = b - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j .$$

transitorios: 10^3, $n = 5\times10^4$.

No existen ventanas de periodicidad para $b\in[-1,1]$.



caos: $\lambda > 0$ para $b\in[-1,1]$

Caos y límite de predicción: ejemplo

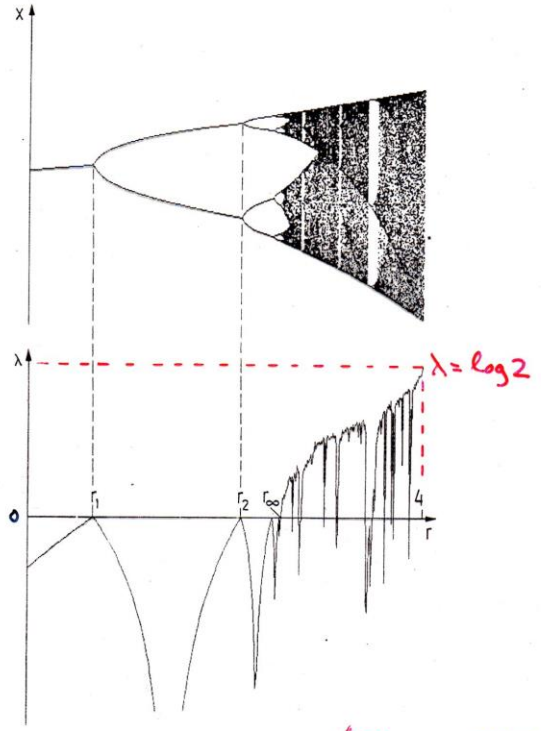
Exponente de Lyapunov en función de r (logístico)

$$\lambda(r) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log |f_r'(x_i)|$$

$$f_r'(x_i) = r(1-2x_i)$$

$\lambda(r) < 0 \Rightarrow$ órbita periódica estable, $r < r_\infty = 3.56\ldots$

Para $r > r_\infty$, existen ventanas de periodicidad entre región caótica



Para $r=4$, $\lambda = \ln 2$

Separación exponencial $\delta(n) = \delta(0)\, e^{\lambda n}$

Nº de iteraciones para que $\delta(n) \simeq 1$

$$\lambda n = \ln\left[\frac{\delta(n)}{\delta(0)}\right]$$

Supongamos $\delta(0) = 10^{-6}$.

$$n = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{10^{-6}}\right) = 6 \times \frac{\ln 10}{\ln 2}$$

$\Rightarrow n = 17.3$ iteraciones

$\rightarrow$ horizonte de predicción, predicción imposible para $n > 17$.

http://laconga.redclara.net

contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for
Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.