

Clase 23: El circuito de Chua

Mario Cosenza
Werner Bramer

Módulo de Instrumentación



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea





Diagrama de bifurcación de mapa cuadrático

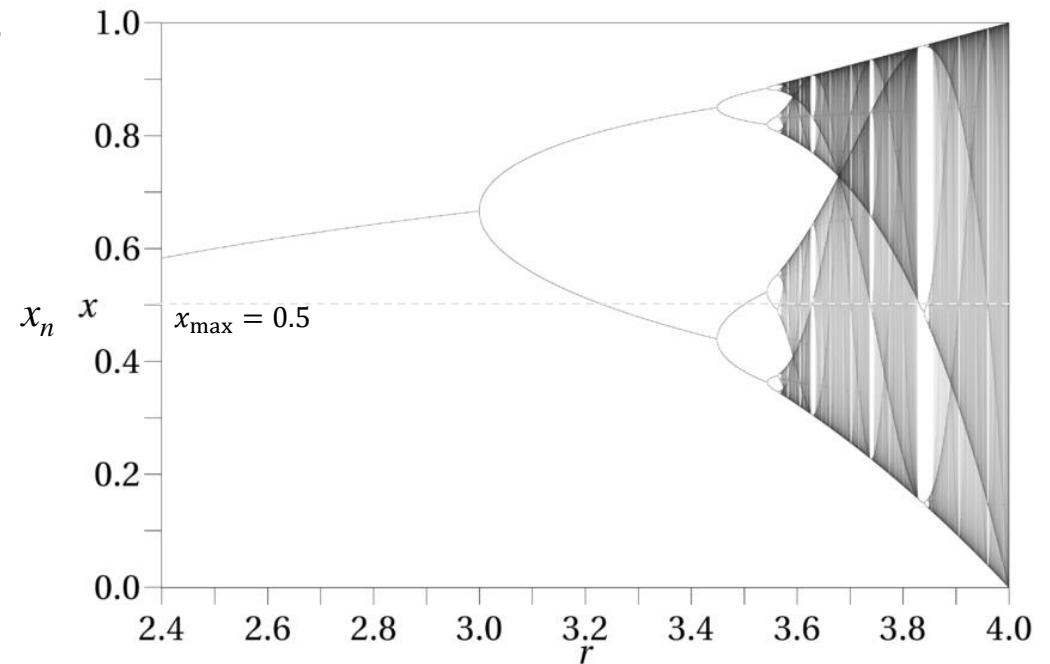
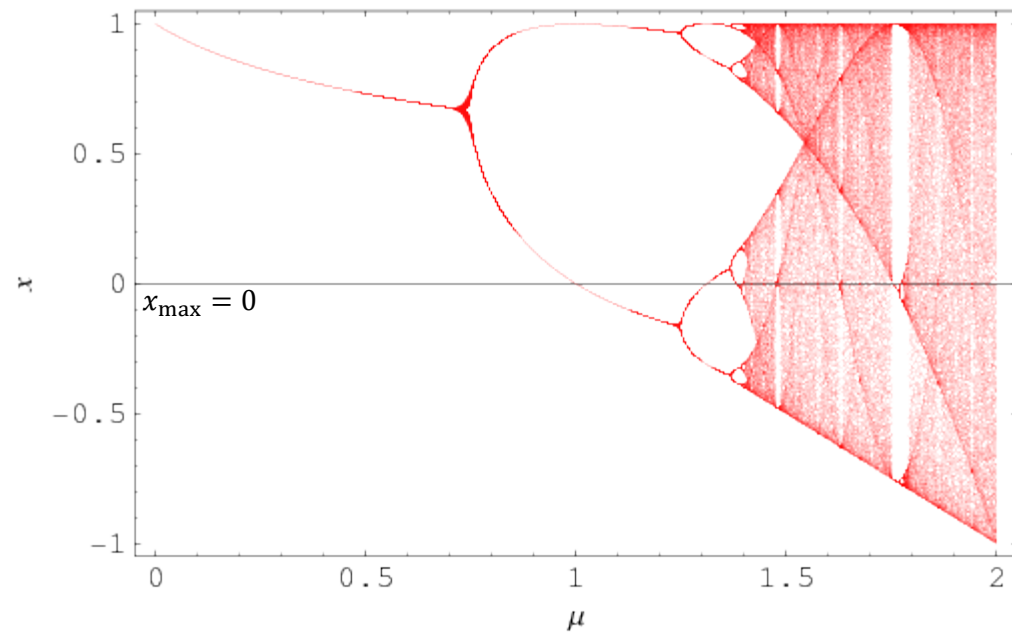
Comportamiento dinámico de sistemas no lineales depende de parámetros.

Bifurcación: cambio de comportamiento dinámico al variar parámetro

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1-x_n) \quad x_n \in [0,1]$$

secuencia de duplicación de períodos (bifurcación de período doble) al variar r :
 $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots \rightarrow 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4$ para $r < 3.569 \dots$

caos y ventanas de periodicidad para $r > 3.569 \dots$



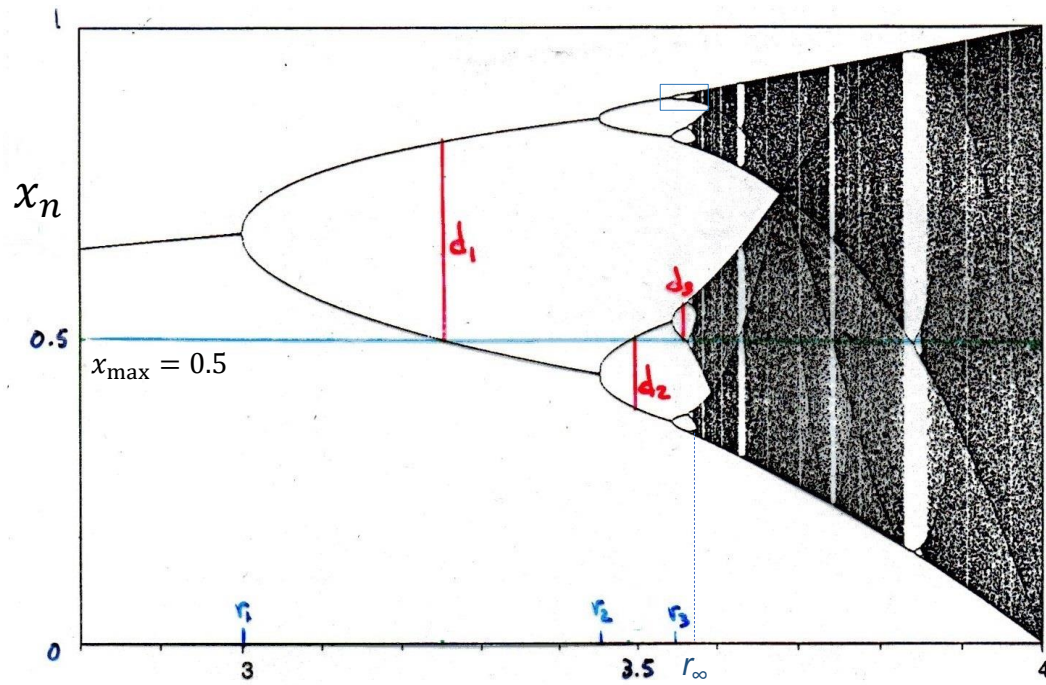
$$x_{n+1} = f(x_n) = 1 - \mu x_n^2 \quad x_n \in [-1,1]$$

secuencia de duplicación de períodos de la forma
 $2^n, n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ para transición al caos al variar parámetro.

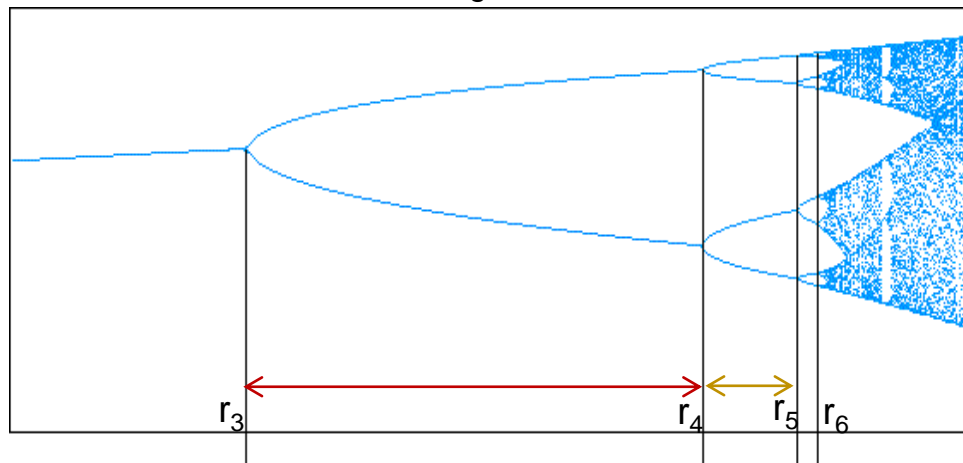
**Comportamiento universal para mapas
con un máximo o mínimo x_{\max} cuadrático.**



Constante δ de Feigenbaum



magnificación



$x_{n+1} = f(x_n, r) = rx_n(1 - x_n)$ mapa con máximo o mínimo x_{\max} cuadrático.

Órbita de período p satisface: $f^{(p)}(x, r) = x \rightarrow$ ecuación algebraica para r

Transición al caos por duplicación de períodos:

r_n : valor de parámetro r para el cual nace una órbita de período 2^n , $n = 1, 2, \dots, \infty$

| n | cycle (2^n) | r_n |
|----------|--------------------|-------------|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 3.449490 |
| 3 | 8 | 3.544090 |
| 4 | 16 | 3.564407 |
| 5 | 32 | 3.568750 |
| 6 | 64 | 3.56969 |
| 7 | 128 | 3.56989 |
| 8 | 256 | 3.569934 |
| 9 | 512 | 3.569943 |
| 10 | 1024 | 3.5699451 |
| 11 | 2048 | 3.569945557 |
| ∞ | accumulation point | 3.569945672 |

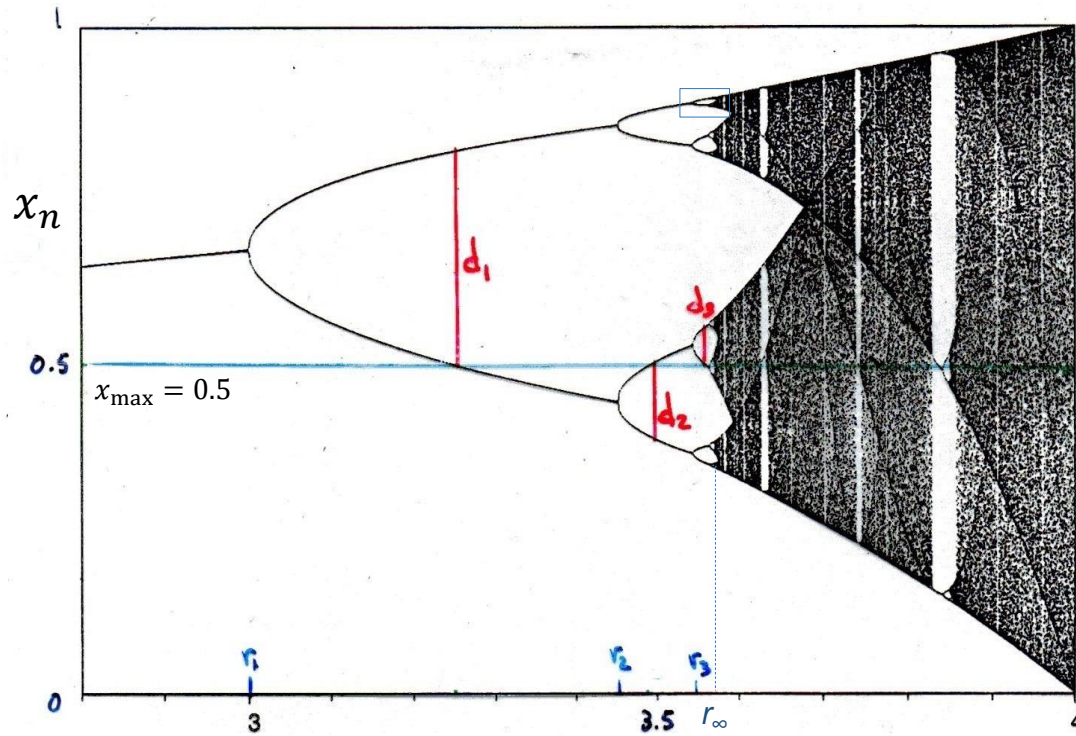
Convergencia geométrica:
 δ constante de convergencia

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.6692016 \dots$$

M. Feigenbaum (1978):
constante universal para transición
al caos por duplicación de períodos.



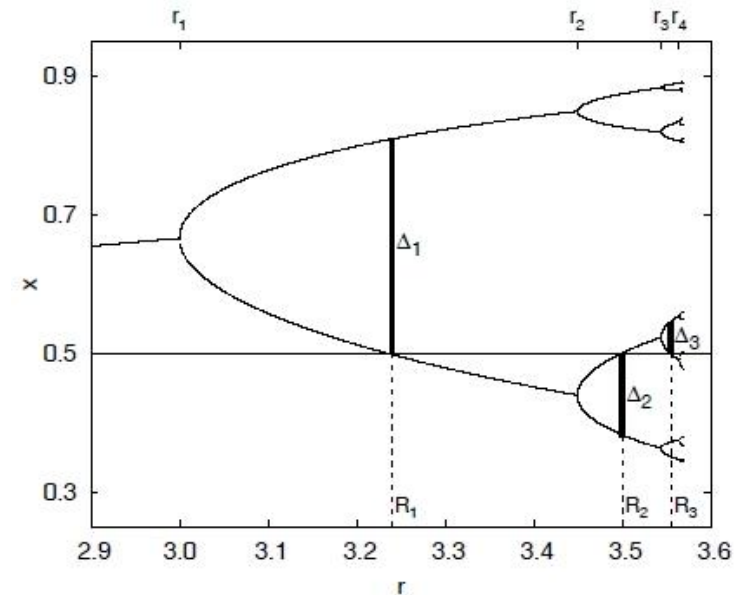
Constante α de Feigenbaum



Para $r = r_\infty$: órbita tiene periodo $2^\infty \rightarrow$ caótico.
 \rightarrow Atractor de Feigenbaum \rightarrow fractal

Escalamiento de la órbita en transición al caos por duplicación de períodos:
 d_n : distancia (x_{\max} - punto más cercano) en una órbita de período 2^n

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -2.502907 \dots$$

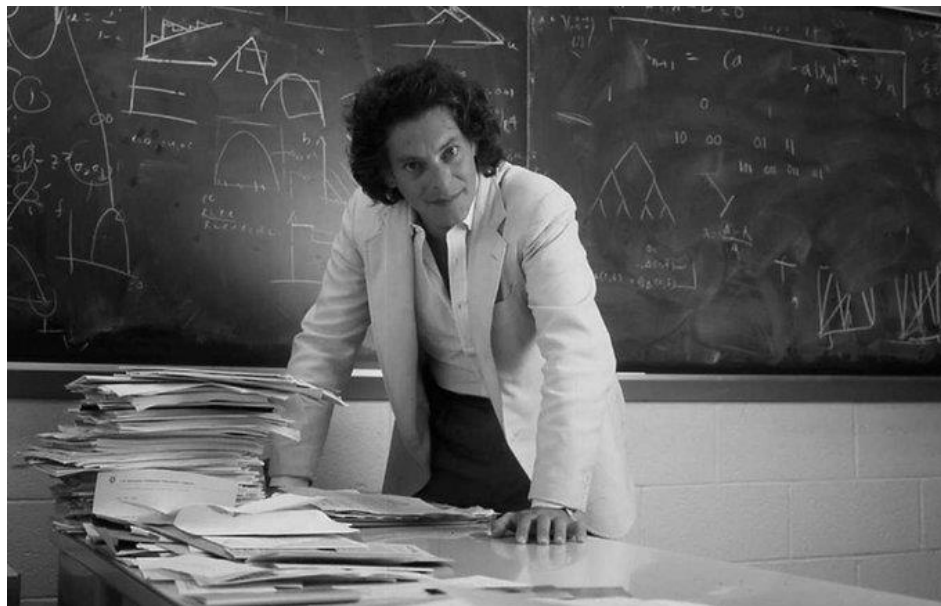




Constantes de Feigenbaum

Feigenbaum demostró la universalidad de δ y α usando teoría de renormalización (analogía con transición de fase).

Mitchell Feigenbaum (1944-2019)



$$\alpha(2) = -2.$$

502907875095892822283902873218215786381271376727149977336192
056779235463179590206703299649746433834129595231869995854723
942182377785445179272863314993372578112163594879503744781260
997380598671239711737328927665404401030669831383460009413932
236449065788995122058431725078733774630878534242853519885875
000423582469187408204281700901714823051821621632597520264070
154734369163264859567116308023672243466392188083369967457397
123570489870973555736656062998020709602323617758740920917918
862600565037392462501491789236269217819393491578638085655372
062878991364751071130930882955530528

$$\delta(2) = 4.$$

669201609102990671853203820466201617258185577475768632745651
343004134330211314737138689744023948013817165984855189815134
408627142027932522312442988890890859944935463236713411532481
714219947455644365823793202009561058330575458617652222070385
410646749494284981453391726200568755665952339875603825637225
648004095107128389061184470277585428541980112212097941214729
746823497270154908259119420781334087939674017078877189675350
024865725197764177756197784795912347535009737589351782623659
047350752485156705948080910948188617490903004106492043004698
687299477012918774513898492098234382



$$x_{n+1} = f(x_n) = \lambda(1 - 2x_n^2)$$

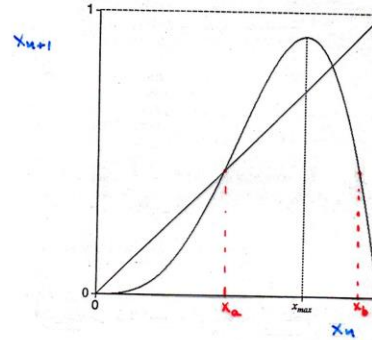
| N | λ | δ |
|----|--------------------------------|------------------|
| 1 | 0.7071067811865475244008443621 | 4.74430946893705 |
| 2 | 0.8095377203493463168459541018 | 4.67444782765301 |
| 3 | 0.8311279938830304702482833891 | 4.67079115022921 |
| 4 | 0.8357467797438888850823009395 | 4.66946164833746 |
| 5 | 0.8367356455938705846037094966 | 4.66926580979910 |
| 6 | 0.8369474185828047108022721846 | 4.66921427043589 |
| 7 | 0.8369927732483047323090713162 | 4.66920445137251 |
| 8 | 0.8370024868024425943459682976 | 4.66920220132661 |
| 9 | 0.8370045671470149993313732630 | 4.66920173797283 |
| 10 | 0.8370050126930596349457550266 | 4.66920163645133 |
| 11 | 0.8370051081153758334851887620 | 4.66920161499127 |
| 12 | 0.8370051285519137318702724660 | 4.66920161036023 |
| 13 | 0.8370051329287943173583990344 | 4.66920160937272 |
| 14 | 0.8370051338661881055761765511 | 4.66920160916069 |
| 15 | 0.8370051340669491492492744646 | 4.66920160911533 |
| 16 | 0.8370051341099460169105929249 | 4.66920160910564 |
| 17 | 0.8370051341191546292732244007 | |
| 18 | 0.8370051341211268320465365015 | |

Universalidad de α y δ

Ej.

$$x_{n+1} = h(x_n) = \alpha x_n^2 \sin(\pi x_n)$$

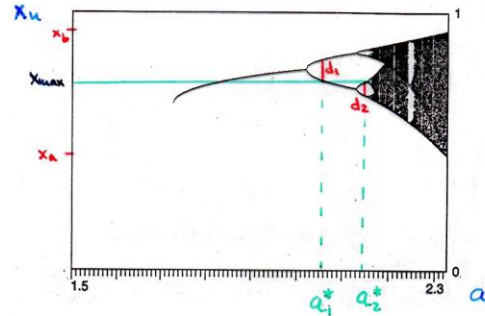
$\alpha = 2.3$



$h(x) \rightarrow$ cuadrática
alrededor de x_{max} .
 $h'(x_{max}) = 0$.

$\bar{x} = 0$, atractor
para $x \notin [x_a, x_b]$,
 $\forall \alpha$.

diagrama de bifurcaciones



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^* - a_{n-1}^*}{a_{n+1}^* - a_n^*} = 4.6692\dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -2.502\dots$$

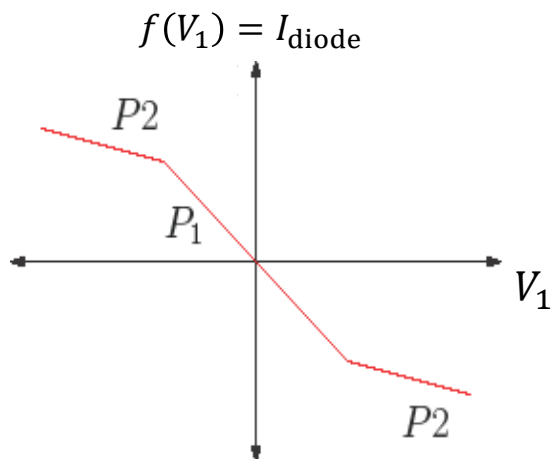
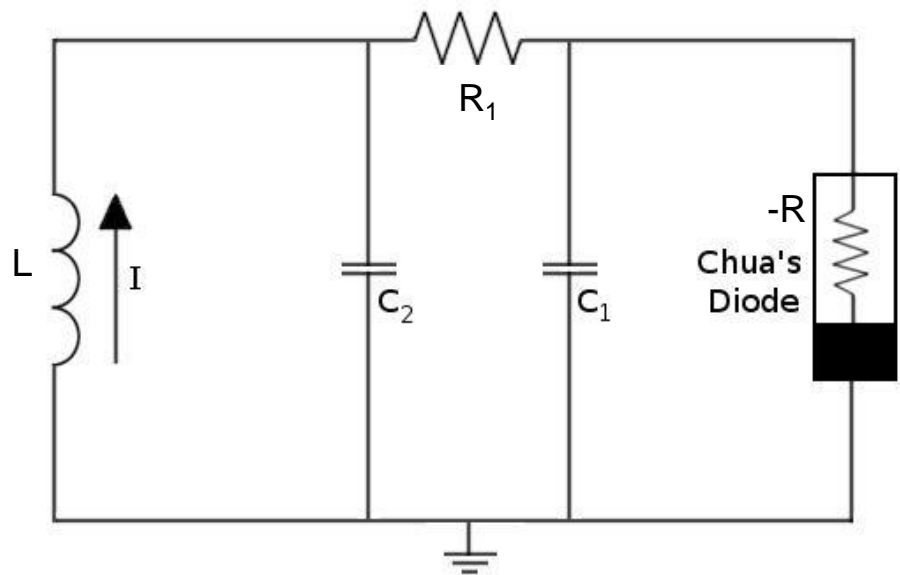
Primeras medidas experimentales

| Experiment | Number of period doublings | δ (4.669) | α (2.503) | R (4.648) |
|----------------------|----------------------------|---------------------|---------------------|----------------|
| <u>Hydrodynamic:</u> | | | | |
| Water [1] | 2 | | | |
| Water [2] | 4 | 4.3 ± 0.8 | | 4 ± 1 |
| Helium [3] | 4 | 3.5 ± 0.15 | | $4 \pm ?$ |
| Mercury [4] | 4 | 4.4 ± 0.1 | | 5 ± 1 |
| <u>Electronic:</u> | | | | |
| Diode [5] | 4 | 4.5 ± 0.6 | | $6 \pm ?$ |
| Diode [6] | 5 | 4.3 ± 0.1 | 2.4 ± 0.1 | Consistent |
| Transistor [7] | 4 | 4.7 ± 0.3 | | Consistent |
| Josephson [8] | 3 | 4.5 ± 0.3 | 2.7 ± 0.2 | |
| <u>Laser:</u> | | | | |
| Laser feedback [9] | 3 | 4.3 ± 0.3 | Consistent | |
| Laser [10] | 2 | | | |
| Laser [11] | 3 | | | |
| <u>Acoustic:</u> | | | | |
| Helium [12] | 3 | | | |
| Helium [13] | 3 | 4.8 ± 0.6 | | $6 \pm ?$ |
| <u>Chemical:</u> | | | | |
| B-Zh reaction [14] | 3 | | | |

- [1] Gollub and Benson (1980)
- [2] Giglio et al. (1981)
- [3] Libchaber and Maurer (1981)
- [4] Libchaber et al. (1982)
- [5] Linsay (1981)
- [6] Testa et al. (1982)
- [7] Arecchi and Lisi (1982)
- [8] Yeh and Kao (1982)
- [9] Hopf et al. (1981)
- [10] Arecchi et al. (1982)
- [11] Weiss et al. (1983)
- [12] Lauterborn and Cramer (1981)
- [13] Smith et al. (1982)
- [14] Simoyi et al. (1982)



Circuito de Chua



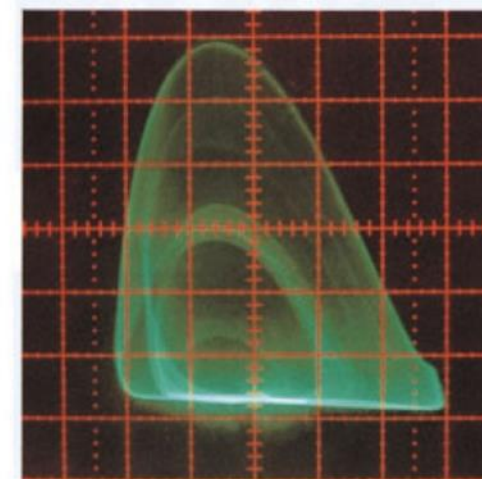
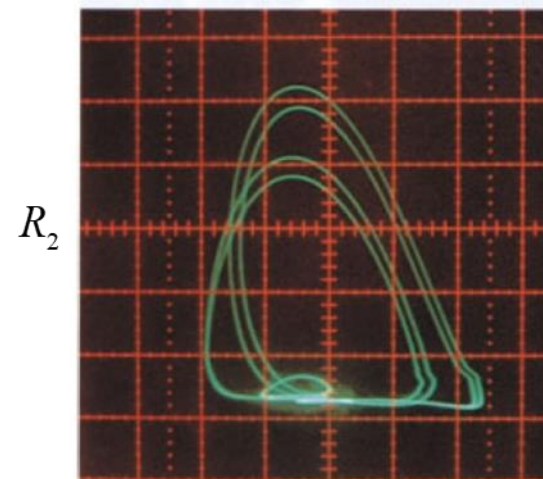
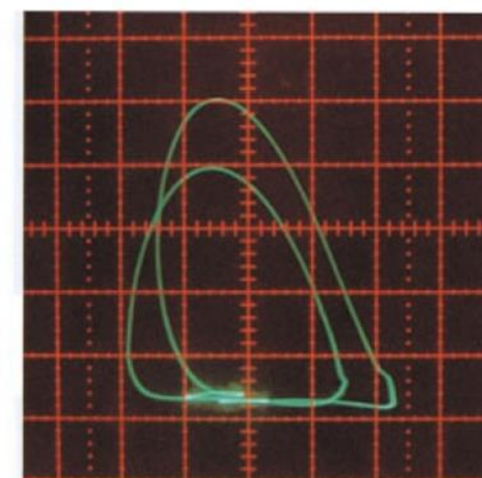
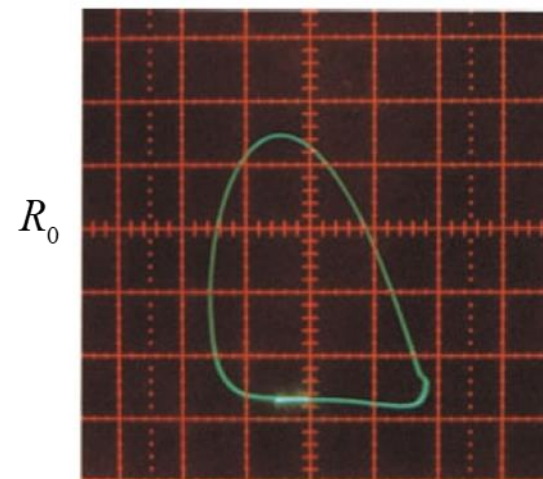
Ecuaciones dinámicas:

$$C_1 \frac{dV_1}{dt} = \frac{V_2 - V_1}{R_1} - f(V_1)$$

$$C_2 \frac{dV_2}{dt} = \frac{V_1 - V_2}{R_1} + I$$

$$L \frac{dI}{dt} = -V_2$$

Señal en osciloscopio al variar R_1





Aplicaciones del caos

Caos: fenómeno universal, aparece del mismo modo en diversidad de sistemas, independiente del contexto.



aplicaciones
interdisciplinarias.

Clima: predicción meteorológica, huracanes, corrientes oceánicas, cambio climático global.

Física: turbulencia, sistemas dinámicos, sistema solar, asteroides caóticos, rotación de Hyperión.

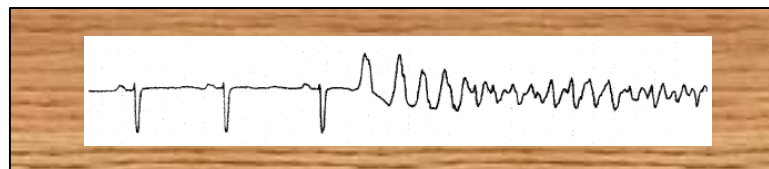
Criptografía: comunicaciones seguras con señales caóticas.

Ecología: dinámica de poblaciones, extinciones, evolución.

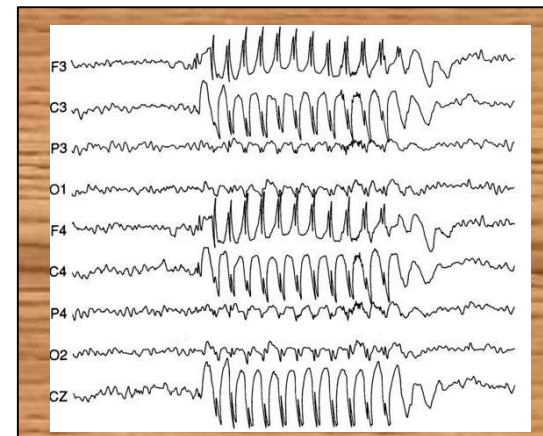
Geología: geomagnetismo terrestre, terremotos, avalanchas.

Economía: modelos económicos, cascadas, análisis de series de datos, Dow Jones.

Fisiología: ECG fibrilación cardíaca: caos



EEG epilepsia: actividad sincronizada en zonas del cerebro





Enseñanzas del caos y sistemas no lineales

- Sensibilidad a las condiciones iniciales (efecto mariposa) implica predicción limitada en muchos sistemas deterministas.
- Sistemas simples (pocas variables) pueden tener comportamiento complejo.
- Propiedades universales en transiciones orden-caos: Ej. constante de Feigenbaum.
- El caos posee estructura geométrica (fractal) y dinámica caracterizada por exponente de Lyapunov positivo.
- Fenómeno universal, no asociado a teoría, contexto o interacción específica: ocurre en sistemas físicos, químicos, biológicos, económicos, etc.



Condiciones *necesarias*, pero *no suficientes* para el caos:

- 1) No linealidad.
- 2) Más de 2 variables en espacio de fase si t es continuo. Una variable si t es discreto (mapas).
- 3) No integrable, si es un sistema mecánico.

No existe teorema sobre suficiencia para el caos. No podemos decir a priori si un sistema de ecuaciones no lineales es caótico; tan sólo que en algún rango de parámetros, puede ser caótico.

Existen rutas definidas para transición orden-caos al variar un parámetro, caracterizadas por propiedades universales.

Actualmente, el estudio del Caos y sistemas no lineales ha evolucionado hacia el estudio de **Sistemas Complejos**:

sistema formado por muchos elementos con interacciones mutuas, cuyo comportamiento colectivo (estructuras, patrones, organización) no está presente en los elementos aislados.

Ejemplos: colonias de insectos, cardúmenes, tráfico, cerebro, redes complejas, economía, sistemas sociales.



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongaphysics



Latin American alliance for
Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.