Para los vidrios de espines (S.G.)

→ problema de la dinámica, el sistema tiene en tiene en tiempo de relajación → ∞.

→ transición dinámica.

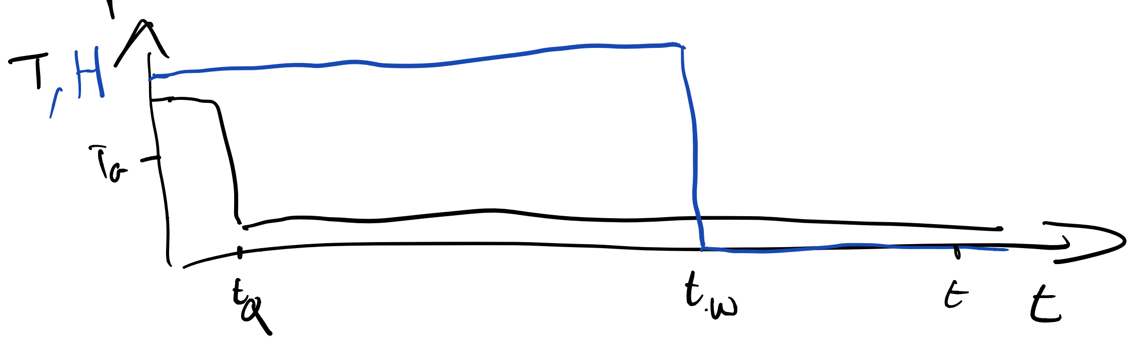
→ el tiempo de relajación, indica cuando diverge → se entra en la fase S.G.

→ fenomenología de un sistema fuera de equilibrio.

→ 3 propiedades interesantes:

* Envejecimiento

experimento de enfriado rápido.

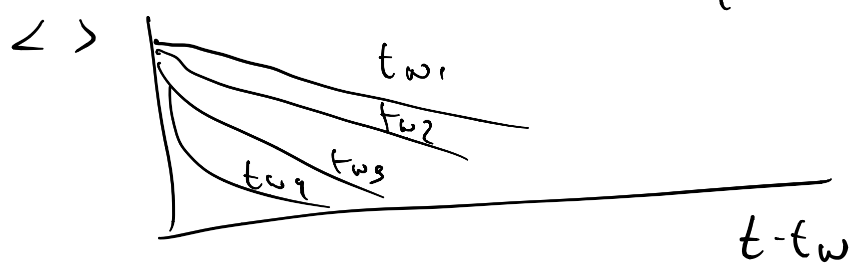


→ se mide $\langle \sigma(t_w)\, \sigma(t) \rangle$ con $t > t_w$

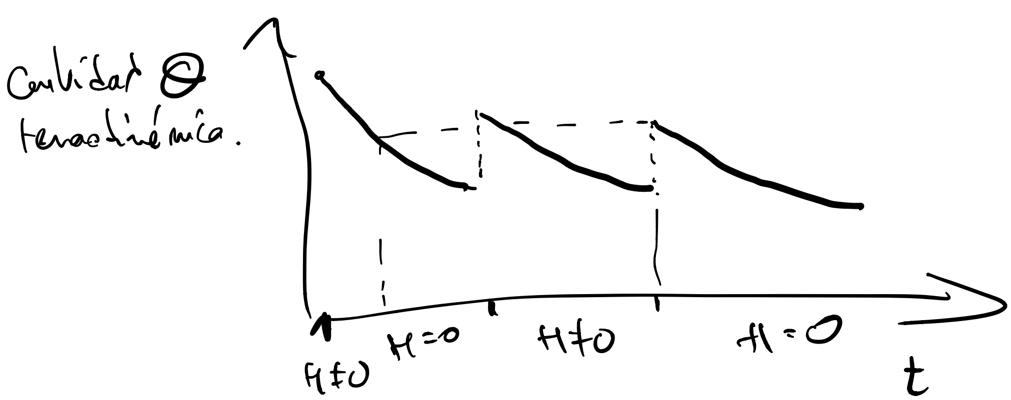
en dinámica de equilibrio, se espera que la función de correlación dependa de $(t - t_w)$.

→ aquí no, mientras mayor es t_w, más lentamente decae $\langle \sigma(t_w)\, \sigma(t) \rangle$

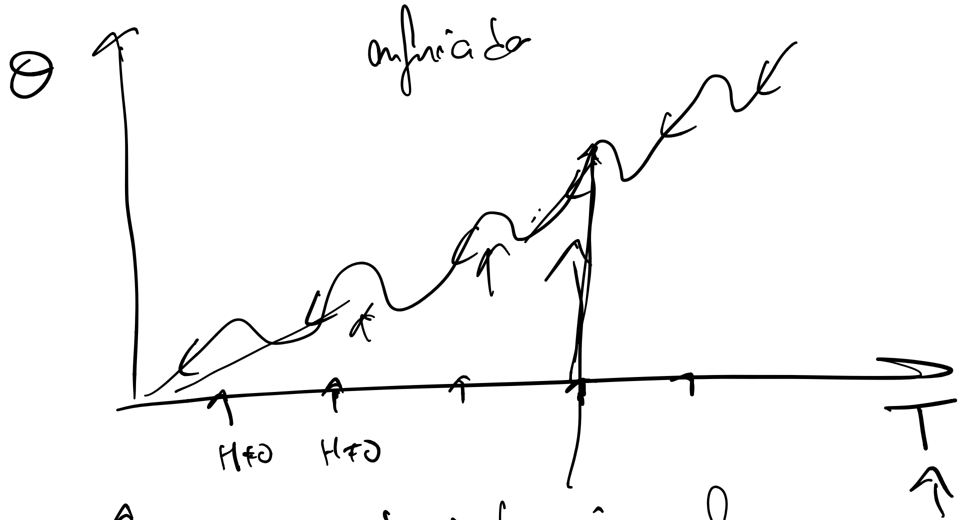
$t_{w_4} < t_{w_3} < t_{w_2} < t_{w_1}$

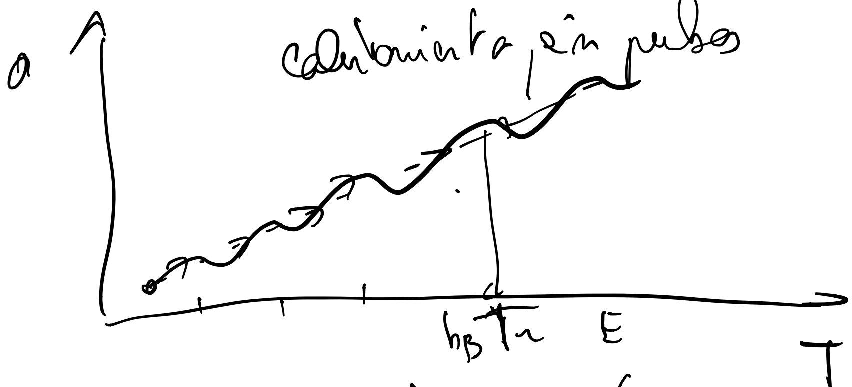


* "Rejuvenecimiento"



* Memoria:





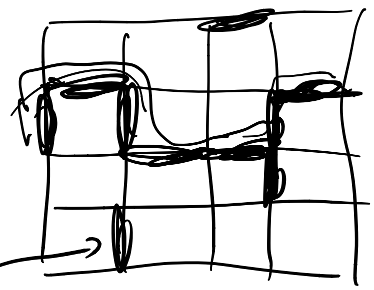
→ múltiples escalas de energía, que pueden quedar "paralizadas",

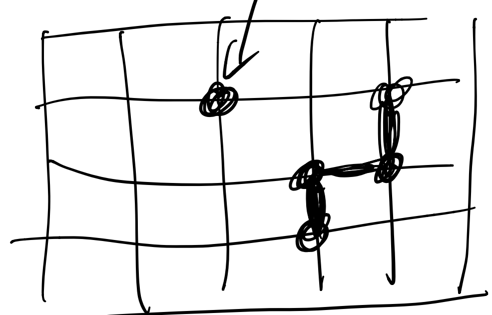
$E \lesssim k_B T$

→ relación con las redes neuronales.

5] Percolación

P vs 1-P





p vs 1-p

Bond percolación

Site percolación.

$P_c = \frac{1}{2}$

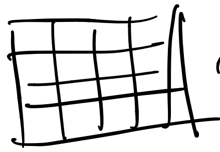
$P_c =$

P la concentración de enlaces

→ tengo un enlace con probab P

nada " " " " " " 1-P

$P = 0$ ~ $\boxed{\text{Lago sin puentes}}$

$P = 1$  red perfecta.

→ $\exists\, p_c$ a partir del cual hay al menos 1 cluster que percola.

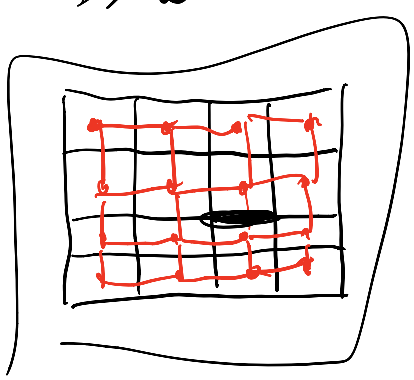
en p_c el cluster es un fractal de dimensión fractal $D_f < D$

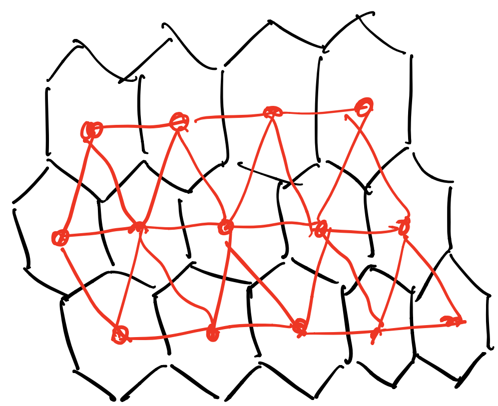
el sistema en p_c es invariante de escala

→ punto crítico, aquí $T \Leftrightarrow p$

$T_c \Leftrightarrow p_c$

Dualidad.





Percolación con la red negra.

se pone un enlace con proba p y no se pone con proba $1-p$

Para la red roja → si enlace negro lleno, → enlace rojo dual → vacío

→ en la red roja → prob. de percolación

$q = 1-p$

Se muestra que si una percola $p > p_c$
entonces el otro no.

entonces si el negro está en p_c
entonces el rojo estará en q_c

→ corolario:

en general $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{negra}}}{p_c} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{roja}}}{q_c} = 1$

por ejemplo $p_c^{\text{triangular}} + p_c^{\text{Hexagonal}} = 1$

y $p_c^{\square} + p_c^{\square} = 1$ osea, para la
red cuadrada

$p_c = \frac{1}{2}$

Cluster de percolación:

si $P < P_c \to$ no hay

si $P > P_c \to$ Dim cluster es $D_c = D$

si N es el # de enlaces en cluster.

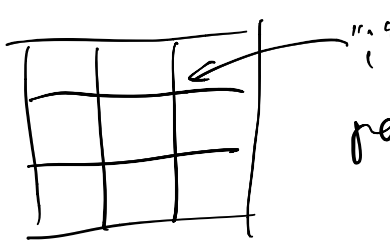
$$L \to bL \qquad N \to b^{D_c} N$$

D_c = dimensión del cluster

justo si $P = P_c$ $\quad D-1 < D_c < D$

$\to$ punto crítico.

Relación con el modelo de Potts:



para cada sitio

$$\sigma_i = 1, 2, 3, \ldots, Q$$

$Q = 2$ (Ising)

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \delta_{\sigma_i, \sigma_j}$$

$$\delta_{\sigma_i,\sigma_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_i = \sigma_j \\ 0 & \text{si } \sigma_i \neq \sigma_j \end{cases}$$

ejercicio: si $Q = 2$,

$\sigma_i = 1, 2 \longrightarrow \tilde{\sigma}_i = \pm 1$

$\longrightarrow H_{Potts} = H_{Ising,\,Ferro} + \text{cte},$

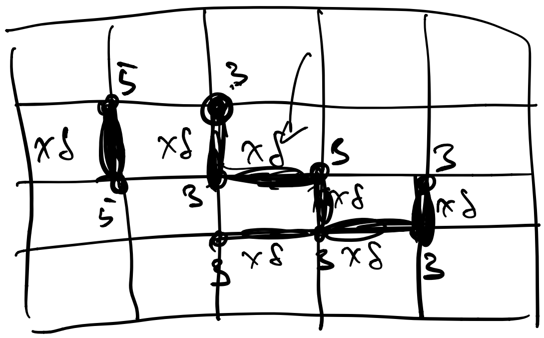
$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-H} \qquad (\beta = 1)$$

obs $$e^{J\delta_{\sigma_i,\sigma_j}} = \underbrace{1 + x\,\delta_{\sigma_i,\sigma_j}}$$

con $x = e^{J} - 1$

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{\beta J \delta_{\sigma_i,\sigma_j}} = \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} (1 + x\,\delta_{\sigma_i,\sigma_j})$$

$\sum_{\text{config}}$



N = # total de enlaces.

$$Z = \sum_{\text{config.}} Q^{N_c} x^{N_B}$$

N_c = # de clusters indep

N_B = # de Bonds llenos en total.

$$\tilde{Z} = (1+x)^{-N} Z$$

$\tilde{Z}$ analítica.

$$\boxed{\tilde{Z} = (1+x)^{-N} \sum_{c} Q^{N_c} x^{N_b} = \tilde{Z}(x, Q, N)}$$

→ continuación analítica a $Q = 1$

para el pd de Percolación:
Cada config con N_B enlaces llenos. tiene un peso

de $p^{N_B}(1-p)^{N-N_B}$; $Z_{perc} = \sum_{conf} p^{N_B}(1-p)^{N-N_B}$

$Z_{perc} = \tilde{Z}$ si $x = \frac{p}{(1-p)}$ y $Q \to 1$

Por ejemplo,

\# promedio de Clusters

$$\langle N_c \rangle = \left.\frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial Q}\right|_{Q=1}$$

Para el modelo de Potts

Parámetro de orden

$$m_{a,i} = \delta_{\sigma_i, a} - \frac{1}{Q}$$

$a = 1, \dots, Q$ Q colores

si $T > T_c$ ($J < J_c$), fase desordenada

→ cada color es igual de representado

$\Rightarrow \langle \delta_{\sigma_i, a} \rangle = \frac{1}{q}$ osea $\langle m_{a,i} \rangle = 0$

luego

$$G_{aa}(i,j) = \underline{\left\langle \left(\delta_{\sigma_i, a} - \frac{1}{q} \right) \left(\delta_{\sigma_j, a} - \frac{1}{q} \right) \right\rangle}$$

da 0 si i y j están en cluster diferentes

pero si i y j estan en el mismo cluster da

$$\sum_{\sigma = 1, \ldots, q} \left(\delta_{\sigma, a} - \frac{1}{q} \right)^2 = \underline{\frac{q-1}{q}} \quad \text{ej.}$$

para el pb de percolación:

$G(i,j)$ = la probabilidad que i y j estén en el mismo cluster.

$$G(i,j) = - \frac{\partial}{\partial q} G_{a,a}(i,j) \Big|_{q=1}$$

si $P < P_c$

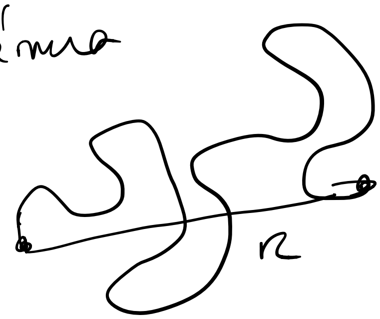
$$G(\vec{r},\vec{r}') \sim \frac{e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\xi}}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{\sim}}$$

$$Y \quad \xi \sim |P-P_c|^{-\nu_{\text{Potts}\, q=1}}$$

otro ejemplo famoso

Polímero

de largo L



$\longleftrightarrow$ S.A.L. modelo $O(n)$

(De Gennes 1972') con $n \to 0$

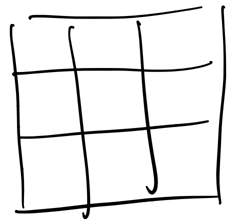
r el alcance. $\quad r \sim L^{\nu}$

$$\nu \underset{\substack{\uparrow \\ \text{R.G.} \\ \text{Wilson-Fisher.}}}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{n+2}{n+8}\epsilon + O(\epsilon^2)$$

$$\to \nu_{Pol} = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{16} + O(\epsilon^2)$$

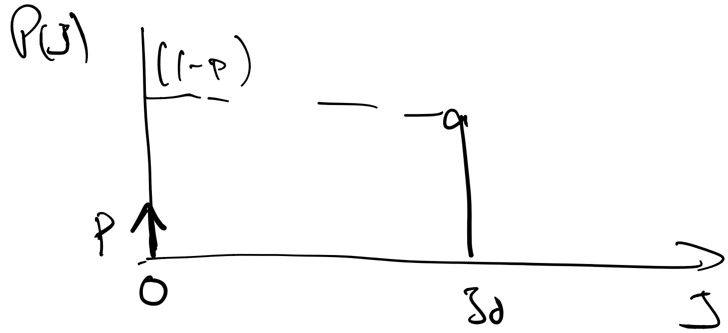
ejemplo

El modelo de Ising con acoples diluidos

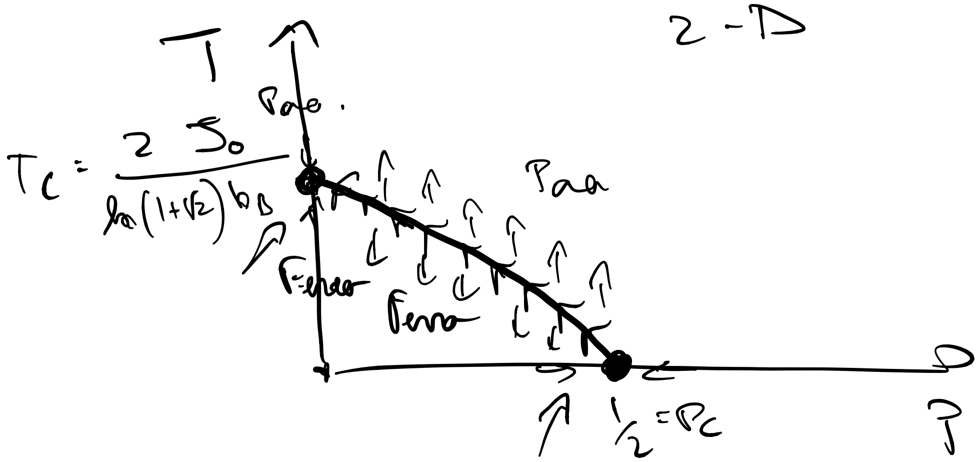


$$H = -\sum_{\langle i,j\rangle}{}' J_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j \qquad \sigma_i = \pm 1$$

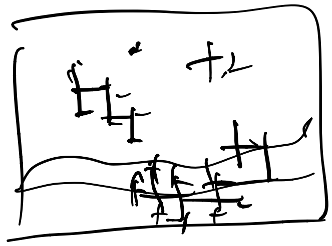
Aquí J_{ij} son variables aleatorias

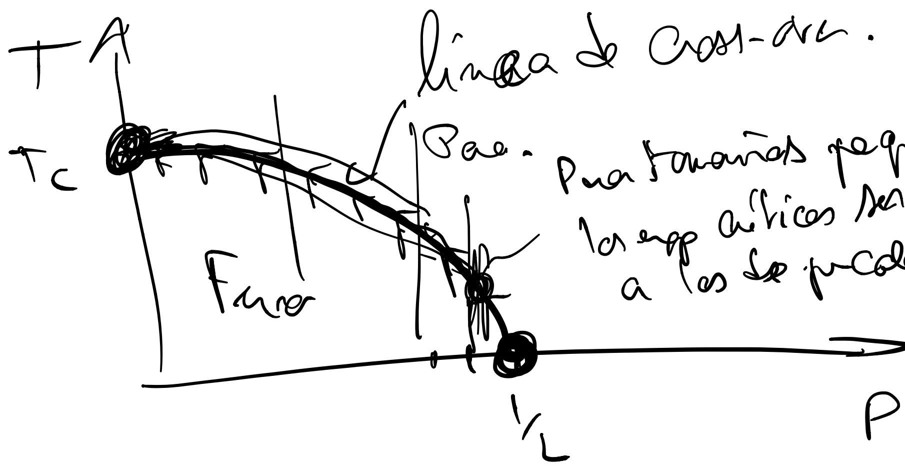


2-D



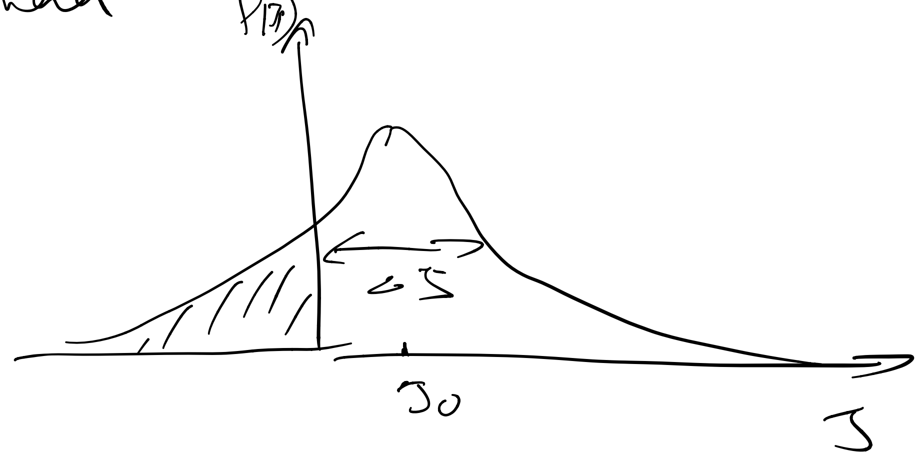
$T = 0$

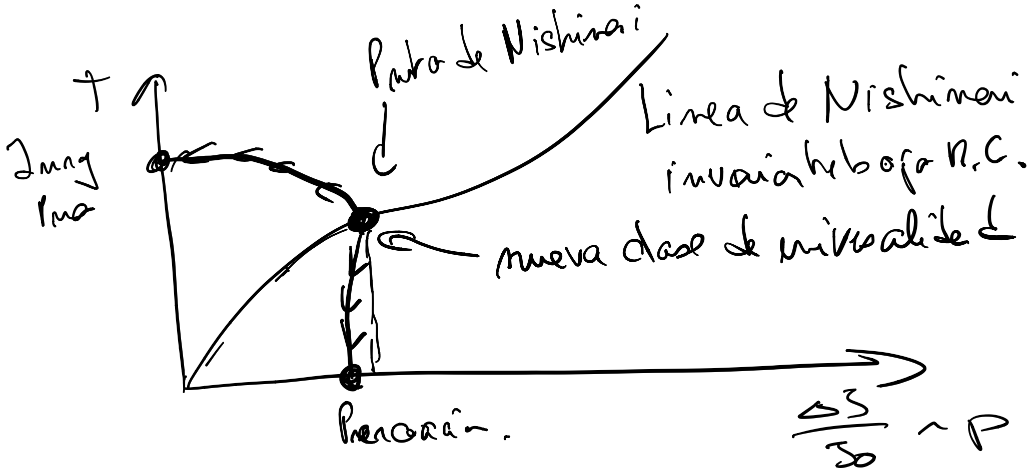




Para tamaños pequeños los exp críticos son próximos a los de percolación

ahora




T
Ising
Puro
Punto de Nishimori
Línea de Nishimori
invariante bajo R.C.
nueva clase de universalidad
Percolación.
$\frac{\Delta J}{J_0} \sim p$