

Apuntes de clase: Campo de Dirac, Maxwell y  
perturbaciones en QED

José Antonio López Rodríguez

26 de marzo de 2021

# Índice general

<b>1. Campo de Dirac</b>	<b>4</b>
1.1. Sobre la representación de número en fermiones . . . . .	5
1.2. El Campo de Dirac . . . . .	8
1.3. Simetría de Lorentz . . . . .	13
1.4. Transformaciones finitas . . . . .	17
1.5. Soluciones de la ecuación de Dirac . . . . .	21
1.6. Propiedades de $\omega_r(\vec{p})$ . . . . .	24
1.7. Densidad lagrangiana, cantidades conservadas, etc . . . . .	25
1.7.1. C cantidades conservadas: Momento lineal . . . . .	27

1.7.2. Momento angular . . . . .	28
1.8. Cuantización del Campo de Dirac . . . . .	30
1.9. Álgebra de modos . . . . .	31
1.10. Observables y orden normal . . . . .	32
1.10.1. Hamiltoniano . . . . .	32
1.10.2. Momento lineal . . . . .	34
1.10.3. Carga . . . . .	35
1.11. Propagador de Feynman . . . . .	36
<b>2. Campo de Maxwell</b>	<b>37</b>
2.0.1. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	38
2.0.2. Lagrangiano . . . . .	40
2.0.3. Invariancia de calibre . . . . .	40
2.0.4. Momentos canónicos y singularidad . . . . .	41
2.0.5. Lagrangiano a la Fermi . . . . .	42
2.0.6. Momentos canónicos a la Fermi . . . . .	44
2.0.7. El plan . . . . .	45
2.0.8. Soluciones clásicas . . . . .	46

2.0.9. Cuantización . . . . .	48
2.0.10. Propagador de Feynman . . . . .	49
2.0.11. Hamiltoniano . . . . .	49
2.0.12. Estados de norma negativa y Gupta-Bleuler . . . . .	50
<b>3. Lagrangiano electrodinámica cuántica y perturbaciones</b>	<b>53</b>
3.1. Reglas de Feynman para QED . . . . .	56
3.1.1. Reglas . . . . .	57
3.1.2. Ejemplo $n = 1$ . . . . .	59
3.1.3. Diagramas a orden $n = 2$ . . . . .	63

# Capítulo 1

## Campo de Dirac

El Campo de Dirac es el objeto más importante en la descripción de partículas de espín  $\frac{1}{2}$ , fermiones. Partículas que obedecen la estadística de Fermi-Dirac. El desarrollo de esta parte sigue la forma de las referencias [1, 2, 3, 4, 5, 6]

## 1.1. Sobre la representación de número en fermiones

Un detalle a resaltar en la cuantización de una teoría de bosones es que el sistema libre es una colección de osciladores armónicos.

Tenemos una serie de operadores de creación y destrucción de modos, etiquetados por estados, genéricamente  $r, s \dots$

$$\begin{aligned} [a_r, a_s^\dagger] &= \delta_{rs}, \\ [a_r, a_s] &= 0, \\ [a_r^\dagger, a_s^\dagger] &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

El operador de número del estado  $r$ ,

$$N_r \equiv a_r^\dagger a_r, \tag{1.2}$$

$$[N_r, a_s^\dagger] = \delta_{rs} a_r^\dagger = \delta_{rs} a_s^\dagger, \tag{1.3}$$

$$[N_r, a_s] = -\delta_{rs} a_r = -\delta_{rs} a_s, \tag{1.4}$$

cuenta el nivel (número de excitaciones o partículas) presentes en la configuración  $r$ . El operador  $a_r^\dagger$  agrega una partícula de configuración  $r$ . Al contrario, el operador  $a_r$  remueve una partícula.

Existe un estado de vacío  $|0\rangle$ ,

$$a_r|0\rangle = 0; \quad \forall r. \quad (1.5)$$

- El vacío es el estado sin excitaciones (partículas) (ecuación 1.5)
- El vacío tiene la mínima energía del sistema: cero en la prescripción de orden normal.

Como hemos dicho, los operadores  $a_r^\dagger$  permiten ir agregando grados de libertad de partícula libre, con números cuánticos definidos por la etiqueta  $r$  (4-momento lineal y espín) al estado sobre el cual actúan. En particular, podemos contabilizar que el nuevo estado ha modificado su 4-momento de conforme lo establecido en la etiqueta  $r$ .

Por ejemplo, si consideramos el siguiente estado (sin normalizar):

$$a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}^\dagger |0\rangle \sim |\vec{p}, \vec{p}, \vec{p}'\rangle, \quad (1.6)$$

esperamos que represente un estado compuesto por 3 partículas libres. 2 de momento lineal  $\vec{p}$  y una de momento lineal  $\vec{p}'$ . Vamos a jurungar<sup>1</sup> un poco este estado, para convencernos y entender mejor la idea.

---

<sup>1</sup>tr. coloq. *R. Dom. y Ven.* hurgar [7]

Aplicando el operador  $N_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}$  nos queda:

$$\begin{aligned}
 N_{\vec{p}}|2\vec{p}, \vec{p}' \rangle &\sim a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger |0 \rangle \\
 &= a_{\vec{p}}^\dagger (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^\dagger]) a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger |0 \rangle && ([a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^\dagger] = 1) \\
 &= a_{\vec{p}}^\dagger (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}) a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger |0 \rangle + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger |0 \rangle \\
 &= a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^\dagger]) a_{\vec{p}}^\dagger |0 \rangle + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger |0 \rangle \\
 &= a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}) a_{\vec{p}}^\dagger |0 \rangle + 2a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger |0 \rangle \\
 &= a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^\dagger]) |0 \rangle + 2a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger |0 \rangle && ([a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^\dagger] = 0) \\
 &= a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}) |0 \rangle + 2a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger |0 \rangle && (a_{\vec{p}} |0 \rangle = 0) \\
 &= 2a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger |0 \rangle \\
 &\sim 2|2\vec{p}, \vec{p}' \rangle .
 \end{aligned}$$

El autovalor del operador número de partículas de momento lineal  $\vec{p}$  es 2. El estado contiene dos partículas de momento lineal  $\vec{p}$ .

Se puede obtener el mismo resultado usando las propiedades del operador de número (1.3 y 1.4). Probando para  $N_{\vec{p}'}$ ,



$$\begin{aligned}
 N_{\vec{p}'} |2\vec{p}, \vec{p}'\rangle &\sim N_{\vec{p}'} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle && ([N_{\vec{p}'}, a_{\vec{p}}^\dagger] = 0) \\
 &= a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger N_{\vec{p}'} a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \\
 &= a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger (a_{\vec{p}}^\dagger, N_{\vec{p}'} + [N_{\vec{p}'}, a_{\vec{p}}^\dagger]) |0\rangle && ([N_{\vec{p}'}, a_{\vec{p}}^\dagger] = a_{\vec{p}}^\dagger) \\
 &= a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger N_{\vec{p}'} |0\rangle + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle && (N_{\vec{p}'} |0\rangle = 0) \\
 &= a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \\
 &\sim |2\vec{p}, \vec{p}'\rangle .
 \end{aligned}$$

El autovalor del operador número de partículas de momento lineal  $\vec{p}'$  es 1. El estado contiene una partícula de momento lineal  $\vec{p}'$ .

## 1.2. El Campo de Dirac

En la construcción de los ingredientes de una teoría de campos, la simetría de Poincaré juega un papel protagónico. La evidencia observacional y experimental accesible y que acumula nuestro conocimiento indica que esta simetría está presente a un nivel fundamental de la naturaleza y permite definir el conjunto de observadores inerciales.

Los campos son objetos que dan cuenta de los grados de libertad en cierto sistema físico. En una teoría física exitosa, la forma general de estos objetos es independiente del observador que describe el sistema. Además, las transformaciones de simetría que relacionan a dos observadores relacionan también los campos presentes en la descripción de cada observador, transformándolos de forma que se pueden verificar las observaciones en cada sistema.

$$\begin{array}{ccc}
 O & \xrightarrow{L} & \tilde{O} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \left. \begin{array}{l} \phi(x) \\ A_\mu(x) \\ \psi(x) \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(L\tilde{x}) \\ \tilde{A}_\mu(\tilde{x}) = L^{-1\nu}{}_\mu A_\nu(L\tilde{x}) \\ \tilde{\psi}(\tilde{x}) = S^{-1}\psi(L\tilde{x}) \end{array} \right.
 \end{array}$$

Existen diferentes representaciones

Escalar

$$D(L) = I \forall L. \tag{1.7}$$

Vectorial o definitoria

$$D(L) = L. \tag{1.8}$$

Para introducir el campo y la representación de Dirac seguiremos el proceso histórico. En el proceso de construir una Mecánica Cuántica Relativista se plantea el siguiente ejercicio a partir de la ecuación de Schrödinger con potencial cero

$$\begin{aligned} i\partial_t\psi &= \mathcal{H}\psi = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} \\ \downarrow \quad \downarrow & \\ i\partial_t\psi &= (-i\hbar\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2)\psi. \end{aligned}$$

- Es una generalización tipo Schrödinger
- Para garantizar la covariancia todas las derivadas son de primer orden.
- Se introduce la energía en reposo como parte del Hamiltoniano.
- Los elementos  $\vec{\alpha}$  y  $\beta$  son operadores no singulares que deben ser determinados. De inmediato se detecta que deben ser hermíticos,

$$\begin{aligned}\beta &= \beta^\dagger, \\ \vec{\alpha} &= \vec{\alpha}^\dagger.\end{aligned}$$

Para mantener una expresión explícitamente covariante se definen los nuevos operadores:

$$\begin{aligned}\gamma^0 &\equiv \beta, \\ \gamma^i &\equiv \beta^{-1}\alpha^i.\end{aligned}$$

La ecuación equivalente queda

$$\begin{aligned}i\hbar\gamma^0\partial_0\psi &= (-i\hbar\gamma^i\partial_i + mc)\psi \\ (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi &= 0\end{aligned}\tag{1.9}$$

donde ya hemos tomado  $\hbar = c = 1$  y  $A^\mu A_\mu = (A_0)^2 - \sum_i (A_i)^2 = A^\mu A^\nu \eta_{\mu\nu}$ .

La relación de dispersión  $p^\mu p_\mu = m^2$  de las soluciones libres garantiza que se cumple la relación entre momentum y energía.

Esta relación se cumple si la función de onda satisface la ecuación de Klein-Gordon. Para atender este requerimiento podemos intentar un producto notable,

$$\begin{aligned}
 (i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi &= 0 \\
 (-\gamma^\nu p_\nu + m)(-\gamma^\mu p_\mu - m)\psi &= 0 \\
 (\gamma^\nu p_\nu \gamma^\mu p_\mu + m\gamma^\nu p_\nu - m\gamma^\mu p_\mu - m^2)\psi &= 0 \\
 \left(\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)p_\mu p_\nu - m^2\right)\psi &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

Si imponemos la condición siguiente,  $\psi$  resuelve la ecuación de Klein-Gordon

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}
 \tag{1.11}$$

- Aparecen condiciones inmediatas sobre los operadores  $\gamma$ ,

$$\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^\mu.
 \tag{1.12}$$

- Se demuestra: Los operadores  $\gamma$  se pueden construir como matrices y la dimensión mínima necesaria es  $D = 4$ .

- Los índices que indican las componentes de las matrices  $\gamma$  y los espinores  $\psi$  no se muestran explícitamente.
- La forma particular de las matrices  $\gamma$  no es importante. Solo es necesario que cumplan con el álgebra de anticonmutación.

### 1.3. Simetría de Lorentz

Queremos construir las transformaciones de Lorentz sobre los objetos  $\psi$

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}) = S^{-1}\psi(L\tilde{x}). \quad (1.13)$$

Para hacerlo, estudiaremos la forma de las transformaciones de Lorentz muy cercanas a la identidad. El álgebra de Lorentz. Las transformaciones que buscamos tienen una forma genérica,

$$S(\omega) = \mathcal{I} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} + \dots \quad (1.14)$$

Recordar que conocemos bien las transformaciones de Lorentz en el espacio-tiempo normal,

$$L(\omega) = \mathcal{I} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + \dots \quad (1.15)$$

Los parámetros  $\omega_{\mu\nu}$  en ambas expresiones deben ser los mismos.

$$\begin{array}{ll} \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} & \text{Es una matriz antisimétrica} \\ \omega_{0i} & \text{se relacionan con las velocidades relativas} \\ \omega_{ij} & \text{se relacionan con los ángulos de rotación} \end{array}$$

$L(\omega)$  es la matriz de Lorentz de siempre. Se puede demostrar lo siguiente. Escogiendo

$$M^{\alpha\beta\mu}_{\nu} = -i(\eta^{\alpha\mu}\delta_{\nu}^{\beta} - \eta^{\beta\mu}\delta_{\nu}^{\alpha}), \quad (1.16)$$

La aproximación lineal de la transformación  $L(\omega)$  es muy simple,

$$L(\omega)^{\mu}_{\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \omega^{\mu}_{\nu} + \dots \quad (1.17)$$

Las matrices  $M$  cumplen las siguientes relaciones de conmutación, que caracterizan el grupo de simetrías de Lorentz,

$$[M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}] = i(\eta^{\nu\beta}M^{\mu\alpha} - \eta^{\mu\beta}M^{\nu\alpha} - \eta^{\nu\alpha}M^{\mu\beta} + \eta^{\mu\alpha}M^{\nu\beta}) \quad (1.18)$$

Las matrices  $\Sigma$  en la expresión general de  $S(\omega)$  de la representación espinorial, deben cumplir las mismas relaciones de conmutación que las  $M$  de la representación definitoria. Además deben ser objetos que actúan de forma natural sobre los  $\psi$ . Las siguientes matrices  $\Sigma$  funcionan,

$$\Sigma^{\mu\nu} \equiv -\frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (1.19)$$

Para demostrarlo se pueden usar estas bien conocidas identidades:

$$\begin{aligned} [A, BC] &= B[A, C] + [A, B]C \\ [A, BC] &= B - \{A, C\} + \{A, B\}C \\ 0 &= [[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] \end{aligned} \quad (1.20)$$

Se puede comenzar con la siguiente relación (**Hacerlo!!!**)<sup>2</sup>,

$$[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = -M^{\mu\nu\rho}{}_\alpha \gamma^\alpha. \quad (1.21)$$

Luego se pasa a la relación de conmutación completa,

$$[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\alpha\beta}] = i(\eta^{\nu\beta}\Sigma^{\mu\alpha} - \eta^{\mu\beta}\Sigma^{\nu\alpha} - \eta^{\nu\alpha}\Sigma^{\mu\beta} + \eta^{\mu\alpha}\Sigma^{\nu\beta}) \quad (1.22)$$

---

<sup>2</sup> $M^{\alpha\beta\mu}{}_\nu = -i(\eta^{\alpha\mu}\delta_\nu^\beta - \eta^{\beta\mu}\delta_\nu^\alpha)$



Los generadores  $\Sigma$  cumplen,

$$(\Sigma^{\mu\nu})^\dagger = \gamma^0 \Sigma^{\mu\nu} \gamma^0. \quad (1.23)$$

Los elementos finitos se obtienen exponenciando el término lineal.

$$S(\omega) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} S^{-1}(\omega) &= S(-\omega) \\ &= e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}} \\ &= e^{(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\Sigma^{\mu\nu})^\dagger)^\dagger} \\ &= e^{(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\gamma^0\Sigma^{\mu\nu}\gamma^0)^\dagger} \\ &= (\gamma^0 e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}} \gamma^0)^\dagger \\ &= \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

Transformación de cantidades covariantes

Definimos el espinor “barra”.

$$\bar{\psi} \equiv (\gamma^0 \psi)^\dagger = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (1.26)$$

- $\bar{\psi}\psi$  es un escalar.
- $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  es un vector. Vale la pena estudiar esta relación (**Estudiarla!!!**):

$$S(\omega)\gamma^\rho S^{-1}(\omega) = L^{-1}(\omega)^\rho{}_\sigma \gamma^\sigma. \quad (1.27)$$

- Notar que las matrices  $\gamma$  son invariantes.
- Todo listo para comprobar que la ecuación de Dirac es invariante.

## 1.4. Transformaciones finitas

Vamos a estudiar dos transformaciones finitas que van a ser de utilidad un boost en una dirección general y una rotación.

Boost general en el espacio-tiempo.

Consideramos la transformación de Lorentz

$$L(\omega) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}} \quad (1.28)$$

Tomamos el caso que solo algunas componentes  $\omega_{0i}$  son distintas de cero.

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}(\omega_{0i}M^{0i} + \omega_{j0}M^{j0}) &= \omega(\hat{u} \cdot \vec{K}), & K^i &= iM^{0i}, \\ (\omega(\hat{u} \cdot \vec{K}))^2 &= \omega^2 P_{\parallel(1,\hat{u})}, \\ (\omega(\hat{u} \cdot \vec{K}))^3 &= \omega^3 (\hat{u} \cdot \vec{K}). \end{aligned} \quad (1.29)$$

La exponencial queda,

$$L(\omega) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}} = P_{\perp(1,\hat{u})} + \cosh(\omega)P_{\parallel(1,\hat{u})} + \sinh(\omega)(\hat{u} \cdot \vec{K}). \quad (1.30)$$

Si fijamos  $\hat{u} \rightarrow (1, 0, 0)$ , el boost queda,

$$L(\omega) = \begin{pmatrix} \cosh(\omega) & \sinh(\omega) & 0 & 0 \\ \sinh(\omega) & \cosh(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

Si  $\beta$  es la velocidad relativa entre los dos observadores, entonces se tiene la siguiente relación entre  $\omega$  y  $\beta$ ,

$$\beta = -\tanh(\omega) \tag{1.32}$$

Supongamos que se tiene una partícula, de masa  $m$ , en reposo y queremos construir una transformación tal que exhiba momentum espacial  $\vec{p}$  cuando es observada en un laboratorio. Solo debemos hacer la siguiente correspondencia:

$$\begin{aligned} \cosh(\omega) &= \frac{E}{m}, \\ \sinh(\omega) &= \frac{\|\vec{p}\|}{m}, \\ \hat{u} &= \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} \end{aligned} \tag{1.33}$$

Boost espinorial

$$\begin{aligned}
 \frac{i}{2}(\omega_{0i}\Sigma^{0i} + \omega_{j0}\Sigma^{j0}) &= \frac{\omega}{2}(\hat{u} \cdot \vec{K}), & K^i &= i2\Sigma^{0i}, \\
 \left(\frac{\omega}{2}(\hat{u} \cdot \vec{K})\right)^2 &= \left(\frac{\omega}{2}\right)^2, \\
 \left(\frac{\omega}{2}(\hat{u} \cdot \vec{K})\right)^3 &= \left(\frac{\omega}{2}\right)^3(\hat{u} \cdot \vec{K}).
 \end{aligned}
 \tag{1.34}$$

La exponencial queda,

$$S\left(\frac{\omega}{2}(\hat{u} \cdot \vec{K})\right) = \cosh\left(\frac{\omega}{2}\right)\mathcal{I} + \sinh\left(\frac{\omega}{2}\right)(\hat{u} \cdot \vec{K}).
 \tag{1.35}$$

Si ahora deseamos hacer la misma transformación donde una partícula de masa  $m$  pasa del reposo a tener momentum espacial  $\vec{p}$ , debemos escribir las funciones  $\cosh\left(\frac{\omega}{2}\right)$  y  $\sinh\left(\frac{\omega}{2}\right)$  en función del parámetro  $\beta = -\tanh(\omega)$  adecuadamente.

$$\begin{aligned}
 \cosh\left(\frac{\omega}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1 + \cosh(\omega)}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{1 + E/m}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{E + m}{2m}} \\
 \sinh\left(\frac{\omega}{2}\right) &= \sqrt{\frac{E - m}{2m}}
 \end{aligned}$$

## 1.5. Soluciones de la ecuación de Dirac

Seleccionamos una representación de las matrices de Dirac,

$$\begin{aligned}
 \gamma^0 &= \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathcal{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \\
 \gamma^i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

Esta base de matrices  $\gamma$  cumple con las propiedades definidas anteriormente. Para hallar las soluciones de la ecuación de Dirac, se comienza trabajando en el sistema donde la partícula se encuentra en reposo. En ese estado su momentum es  $p_\mu \rightarrow (m, 0, 0, 0)$ .

Las soluciones se pueden escribir como autoestados del momentum lineal y no tienen dependencia espacial. La ecuación de Dirac se presenta como 4 ecuaciones desacopladas.

$$(i\gamma^0\partial_0 - m)\psi = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} (i\partial_0 - m)\psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i\partial_0 - m)\psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-i\partial_0 - m)\psi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-i\partial_0 - m)\psi_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (1.37)$$

Soluciones:

$$\psi_r(0) = e^{-i\epsilon_r m x^0} \omega_r(0)$$

El factor  $m x^0 = p_\mu x^\mu$  es un escalar.

$\epsilon_r$  es el signo de la energía de la solución.

$$\epsilon_r = +1 \quad (r = 1, 2)$$

$$\epsilon_r = -1 \quad (r = 3, 4)$$

Los espinores constantes  $\omega_r$  son iguales a la  $r$ -ésima columna de la matriz identidad.

Para construir la solución general, se “boostea” la solución en reposo hasta un momentum arbitrario. Hay que escribir la transformación usando las matrices escogidas.

$$\begin{aligned} S_{m \rightarrow p} &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \mathcal{I} + \sqrt{\frac{E-m}{2m}} (\hat{u} \cdot \vec{K}) \\ &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{p_3}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} \\ 0 & 1 & \frac{p_+}{E+m} & -\frac{p_3}{E+m} \\ \frac{p_3}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} & 1 & 0 \\ \frac{p_+}{E+m} & -\frac{p_3}{E+m} & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Las soluciones más generales son de la forma

$$\psi_r(\vec{p}) = e^{-i\epsilon_r p_\mu x^\mu} \omega_r(\vec{p}),$$

donde los espinores  $\omega_r(\vec{p})$  son las columnas de la matriz de transformación  $S_{m \rightarrow p}$



## 1.6. Propiedades de $\omega_r(\vec{p})$

$$\begin{aligned}
 (\gamma^\mu p_\mu - \epsilon_r m)\omega_r(\vec{p}) &= 0 \\
 \bar{\omega}_r(\vec{p})(\gamma^\mu p_\mu - \epsilon_r m) &= 0 \\
 \bar{\omega}_r(\vec{p})\omega_{r'}(\vec{p}) &= \epsilon_r \delta_{rr'} \\
 \omega_r^\dagger(\epsilon_r \vec{p})\omega_{r'}(\epsilon_{r'} \vec{p}) &= \delta_{rr'} \frac{E}{m} \\
 \Sigma_r \omega_r(\epsilon_r \vec{p})\omega_r^\dagger(\epsilon_r \vec{p}) &= \frac{E}{m} \\
 \Sigma_r \omega_r(\vec{p})\bar{\omega}_r(\vec{p}) &= 1
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

Definimos la solución de momentum  $\vec{p}$  normalizada:

$$\psi_{\vec{p}}^r(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\omega_p}} \omega_r(\vec{p}) e^{-i\epsilon_r p_\mu x^\mu} \tag{1.40}$$

Se cumple,

$$\int d^3x \psi_{\vec{p}'}^{r'\dagger}(x) \psi_{\vec{p}}^r(x) = \delta_{rr'} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'). \tag{1.41}$$

Se escribe la solución más general como una expansión en modos

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_r \int d^3p \, a(\vec{p}, r) \psi_{\vec{p}}^r(x) \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_r \int d^3p \, a^*(\vec{p}, r) \bar{\psi}_{\vec{p}}^r(x)\end{aligned}$$

## 1.7. Densidad lagrangiana, cantidades conservadas, etc

Densidad lagrangiana (hallar la solución clásica!!!)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \tag{1.42}$$

Esta densidad lagrangiana permite derivar la ecuación de Dirac a partir del principio de mínima acción

$$\begin{aligned}
 \pi^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \\
 &\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -m\bar{\psi} \\
 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \pi^\mu &= -i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0
 \end{aligned} \tag{1.43}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\pi}^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\psi}} = 0 \\
 &\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = i\gamma^\mu \psi - m\bar{\psi} \\
 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \bar{\pi}^\mu &= i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} = 0
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

Vista la densidad lagrangiana, y que se deriva la ecuación de Dirac. También se verifica que  $\mathcal{L}$  es invariante de Lorentz (es escalar) y bajo transformaciones de fase global:

$$\begin{aligned}
 \psi &\rightarrow \tilde{\psi} = e^{-i\theta} \psi \\
 \bar{\psi} &\rightarrow \tilde{\bar{\psi}} = e^{i\theta} \bar{\psi}
 \end{aligned}$$

### 1.7.1. Cantidades conservadas: Momento lineal

Recordamos el tensor de energía impulso:

$$T^\mu{}_\nu = \Sigma_I \pi^\mu \partial_\nu \phi^I - \mathcal{L} \delta^\mu_\nu. \quad (1.45)$$

En este caso:

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\nu &= \pi^\mu \partial_\nu \psi + \bar{\pi}^\mu \partial_\nu \bar{\psi} - \mathcal{L} \delta^\mu_\nu \\ &= i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\nu \psi + 0 - \mathcal{L} \delta^\mu_\nu \\ &= i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\nu \psi - \mathcal{L} \delta^\mu_\nu \end{aligned} \quad (1.46)$$

Recordando: la densidad de momento lineal es la componente  $T^0{}_\nu$  del tensor.  $T^0{}_0$  es la energía (densidad hamiltoniana)

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = P_0 = T^0{}_0 &= i\bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi - \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \\ &= -i\bar{\psi} \gamma^i \partial_i \psi + m\bar{\psi} \psi \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$= \psi^\dagger (-i\gamma^0 \gamma^i \partial_i + m\gamma^0) \psi \quad (1.48)$$

Se puede sustituir las soluciones en reposo y ver la forma que tienen:

$$P_0 = m\bar{\psi}_{\vec{p}=0}^r(x)\psi_{\vec{p}=0}^r(x) \sim \epsilon_r m \quad (1.49)$$

$r = 1, 2 \Rightarrow$  Energía positiva

$r = 3, 4 \Rightarrow$  Energía negativa

Componentes espaciales del momento lineal,

$$\begin{aligned} P_i &= i\bar{\psi}\gamma^0\partial_i\psi = i\psi^\dagger\partial_i\psi \\ &= \psi^\dagger(i\partial_i)\psi \end{aligned} \quad (1.50)$$

### 1.7.2. Momento angular

La corriente tiene una parte orbital que contiene al tensor  $T^\mu{}_\nu$  y una parte de espín,

$$J^\mu = J_s^\mu + J_o^\mu = \Sigma_I \pi^\mu{}^I \delta\phi^I - T^\mu{}_\nu \delta^\nu \quad (1.51)$$

La componente de espín depende de la transformación de simetría sobre las componentes de los campos, la orbital depende de las transformaciones espaciales.

$$\begin{aligned}
 J_s^\mu &= \pi^\mu \delta\psi + \delta\bar{\psi} \bar{\pi}^\mu \\
 &= i\bar{\psi} \gamma^\mu \left( \frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} \Sigma^{\alpha\beta} \right) \psi \\
 &= -\omega_{\alpha\beta} \bar{\psi} \gamma^\mu \left( \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \right) \psi
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

Se puede definir

$$J^{\mu\alpha\beta} = \bar{\psi} \gamma^\mu \left( \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \right) \psi \tag{1.53}$$

La densidad de momento de espín es la componente  $J^{0\alpha\beta}$ ,

$$\begin{aligned}
 M^{0\alpha\beta} &= \bar{\psi} \gamma^0 \left( \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \right) \psi \\
 &= \psi^\dagger \left( \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \right) \psi
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

Invariancia de fase global

$$J^\mu = \Sigma_I \pi^\mu \delta\phi^I \tag{1.55}$$

$$\delta\psi = -i\theta\psi \quad (1.56)$$

$$\delta\bar{\psi} = i\theta\bar{\psi} \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} J^\mu &= i\bar{\psi}\gamma^\mu(-i\theta\psi) \\ &= \theta\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \end{aligned} \quad (1.58)$$

## 1.8. Cuantización del Campo de Dirac

Corchetes de Poisson!

$$\{\psi(x^0, \vec{x}), i\psi^\dagger(x^0, \vec{x}')\} = \{\psi(x^0, \vec{x}), \pi^0(x^0, \vec{x}')\} \quad (1.59)$$

$$= \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.60)$$

$$\{\psi(x^0, \vec{x}), \psi^\dagger(x^0, \vec{x}')\} = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.61)$$

Postulado de cuantización: los corchetes se reemplazan por anti-conmutadores.

$$\left\{ \hat{\psi}(x^0, \vec{x}), \hat{\psi}^\dagger(x^0, \vec{x}') \right\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.62)$$

Dinámica

$$\dot{\hat{O}} = -i [\hat{O}, \hat{H}] \quad (1.63)$$

- La ecuación de Heisenberg sigue siendo un conmutador
- Estamos trabajando en el cuadro de Heisenberg hasta que se indique otra cosa

## 1.9. Álgebra de modos

$$\hat{\psi}(x) = \int d^3p \hat{a}(\vec{p}, r) \psi_{\vec{p}}^r(x) \quad (1.64)$$

Se puede despejar  $\hat{a}(\vec{p}, r)$  y hallar las relaciones de anti-conmutación inducidas.

$$\hat{a}(\vec{p}, r) = \int d^3x (\psi_{\vec{p}}^r)^\dagger(x) \hat{\psi}(x) \quad (1.65)$$

$$\left\{ \hat{a}(\vec{p}, r), \hat{a}^\dagger(\vec{p}', r') \right\} = \delta_{rr'} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (1.66)$$



## 1.10. Observables y orden normal

### 1.10.1. Hamiltoniano

Se recupera la densidad hamiltoniana expresión de  $P_0$ . Se puede escribir el hamiltoniano en función de los operadores de creación y destrucción,

$$\hat{H} = \int d^3x \hat{\psi}^\dagger (-i\gamma^0\gamma^i\partial_i + m\gamma^0)\hat{\psi} \quad (1.67)$$

$$= \Sigma_r \int d^3p \hat{a}^\dagger(\vec{p}, r)\hat{a}(\vec{p}, r) \epsilon_r\omega_{\vec{p}} \quad (1.68)$$

De nuevo el sistema parece tener modos de energía negativa, pero solo es un problema en la definición de los modos de creación y destrucción.

Se redefine:

$$\hat{a}(\vec{p}, 1) \equiv \hat{c}(\vec{p}, +) \quad (1.69)$$

$$\hat{a}(\vec{p}, 2) \equiv \hat{c}(\vec{p}, -) \quad (1.70)$$

$$\hat{a}(\vec{p}, 3) \equiv \hat{d}^\dagger(\vec{p}, -) \quad (1.71)$$

$$\hat{a}(\vec{p}, 4) \equiv \hat{d}^\dagger(\vec{p}, +) \quad (1.72)$$

$$\hat{H} = \Sigma_s \int d^3p (\hat{c}^\dagger(\vec{p}, s)\hat{c}(\vec{p}, s) - \hat{d}(\vec{p}, s)\hat{d}^\dagger(\vec{p}, s))\omega_{\vec{p}} \quad (1.73)$$

$$: \hat{H} : = \Sigma_s \int d^3p (\hat{c}^\dagger(\vec{p}, s)\hat{c}(\vec{p}, s) + \hat{d}^\dagger(\vec{p}, s)\hat{d}(\vec{p}, s))\omega_{\vec{p}} \quad (1.74)$$

Hay dos tipos de partículas ( $c$  y  $d$ ).

Otras redefiniciones:

$$\omega_1(\vec{p}) = u(\vec{p}, +) \quad (1.75)$$

$$\omega_2(\vec{p}) = u(\vec{p}, -) \quad (1.76)$$

$$\omega_3(\vec{p}) = v(\vec{p}, -) \quad (1.77)$$

$$\omega_4(\vec{p}) = v(\vec{p}, +) \quad (1.78)$$

$$(1.79)$$

El campo fundamental queda en esta forma

$$\psi(x) = \Sigma_s \int d^3p \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\omega_{\vec{p}}}} (\hat{c}(\vec{p}, s)u(\vec{p}, s)e^{-ip_\mu x^\mu} + \hat{d}^\dagger(\vec{p}, s)v(\vec{p}, s)e^{ip_\mu x^\mu}) \quad (1.80)$$

$$\bar{\psi}(x) = \Sigma_s \int d^3p \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\omega_{\vec{p}}}} (\hat{c}^\dagger(\vec{p}, s)\bar{u}(\vec{p}, s)e^{ip_\mu x^\mu} + \hat{d}(\vec{p}, s)\bar{v}(\vec{p}, s)e^{-ip_\mu x^\mu}) \quad (1.81)$$

Las relaciones de anti-conmutación:

$$\{\hat{c}(\vec{p}, s), \hat{c}^\dagger(\vec{p}', s')\} = \delta_{ss'}\delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (1.82)$$

$$\{\hat{d}(\vec{p}, s), \hat{d}^\dagger(\vec{p}', s')\} = \delta_{ss'}\delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (1.83)$$

### 1.10.2. Momento lineal

$$P_i = \int d^3x \hat{\psi}^\dagger(x)(i\partial_i)\hat{\psi}(x) \quad (1.84)$$

$$= \Sigma_r \int d^3p \hat{a}^\dagger(\vec{p}, r)\hat{a}(\vec{p}, r) \epsilon_r p_i \quad (1.85)$$

$$= \Sigma_s \int d^3p (\hat{c}^\dagger(\vec{p}, s)\hat{c}(\vec{p}, s) - \hat{d}(\vec{p}, s)\hat{d}^\dagger(\vec{p}, s))p_i \quad (1.86)$$

$$: P_i : = \Sigma_s \int d^3p (\hat{c}^\dagger(\vec{p}, s)\hat{c}(\vec{p}, s) + \hat{d}^\dagger(\vec{p}, s)\hat{d}(\vec{p}, s))p_i \quad (1.87)$$

### 1.10.3. Carga

$$\hat{Q} = \int d^3x \hat{\psi}(x) \gamma^0 \hat{\psi}(x) \quad (1.88)$$

$$= \Sigma_r \int d^3p \hat{a}^\dagger(\vec{p}, r) \hat{a}(\vec{p}, r) \quad (1.89)$$

$$= \Sigma_s \int d^3p (\hat{c}^\dagger(\vec{p}, s) \hat{c}(\vec{p}, s) + \hat{d}(\vec{p}, s) \hat{d}^\dagger(\vec{p}, s)) \quad (1.90)$$

$$: \hat{Q} : = \Sigma_s \int d^3p (\hat{c}^\dagger(\vec{p}, s) \hat{c}(\vec{p}, s) - \hat{d}^\dagger(\vec{p}, s) \hat{d}(\vec{p}, s)) \quad (1.91)$$

$\hat{c}^\dagger(\vec{p}, +)$  Crea partícula de momentum  $\vec{p}$ ,  
masa  $m$ , carga  $+$  (y espín  $+$ )

$\hat{c}^\dagger(\vec{p}, -)$  Crea partícula de momentum  $\vec{p}$ ,  
masa  $m$ , carga  $+$  (y espín  $-$ )

$\hat{d}^\dagger(\vec{p}, +)$  Crea partícula de momentum  $\vec{p}$ ,  
masa  $m$ , carga  $-$  (y espín  $+$ )

$\hat{d}^\dagger(\vec{p}, -)$  Crea partícula de momentum  $\vec{p}$ ,  
masa  $m$ , carga  $-$  (y espín  $-$ )

## 1.11. Propagador de Feynman

De forma similar al caso del campo de Klein-Gordon, se pueden escribir los (anti)-conmutadores covariantes en función de funciones características.

$$\left\{ \hat{\psi}^{\pm}(x), \hat{\bar{\psi}}^{\mp}(y) \right\} = iS^{\pm}(x - y), \quad (1.92)$$

donde

$$S^{\pm}(x) = (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + m)\Delta^{\pm}(x). \quad (1.93)$$

El propagador de Feynman es

$$\langle 0|T\{\hat{\psi}(x)\hat{\bar{\psi}}(x')\}|0\rangle = iS_F(x - x'). \quad (1.94)$$

donde

$$S_F(x) = \theta(x^0)S^+(x) - \theta(-x^0)S^-(x) = (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + m)\Delta_F(x). \quad (1.95)$$

$$S_F(x) = \int \frac{d^4p e^{-ipx}}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^{\mu}p_{\mu} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.96)$$

# Capítulo 2

## Campo de Maxwell

En esta sección usamos intensamente [1, 8]

Electromagnetismo. Recordamos que la descripción covariante del electromagnetismo requiere la introducción del tensor de intensidad del campo

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.1}$$

El 4-vector  $A$  unifica los potenciales eléctrico y magnético

$$A_\mu \rightarrow \left( \phi \quad \vec{A} \right) \quad (2.2)$$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Usando  $\eta_{\mu\nu} = \text{Diag}(+1, -1, -1, -1)$  y su inversa  $\eta^{\mu\nu}$  podemos definir el tensor  $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} = F_{\alpha\beta} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

### 2.0.1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones homogéneas (Ley de Gauss magnética y Ley de Faraday) se satisfacen automáticamente al definir  $F$ . La antisimetrización es la clave. En forma covariante se escriben:

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0 \quad (2.5)$$

Las ecuaciones que involucran fuentes (Ley de Gauss y Ley de Ampere-Maxwell) adquieren la siguiente forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (2.6)$$

$$J^\mu \rightarrow \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

En términos del campo  $A$ :

$$\square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = J^\nu \quad (2.8)$$

donde  $\square \equiv \partial_0^2 - \sum_i \partial_i^2$  es el operador de D'Lambert.

Si se toma la divergencia a la ecuación de movimiento, el lado derecho se anula por la antisimetría de  $F$  y la relación resultante es la ley de conservación de la carga eléctrica,



$$\begin{aligned}\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\nu J^\nu \\ \downarrow \quad \downarrow & \\ 0 &= \partial_\nu J^\nu.\end{aligned}\tag{2.9}$$

### 2.0.2. Lagrangiano

El lagrangiano del campo de Maxwell nos va a ayudar obtener las ecuaciones de movimiento (que ya las teníamos), tener otro punto de vista de las simetrías, estudiar el acoplamiento con la materia y la cuantización.

En el lagrangiano del CM, el objeto dinámico es el potencial  $A$  (notar que es indispensable en el acoplamiento a la corriente)

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu\tag{2.10}$$

### 2.0.3. Invariancia de calibre

Recordemos que los campos ( $F$ ) son invariantes al hacer una transformación de calibre,

$$A_\mu(x) \rightarrow \tilde{A}_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x). \quad (2.11)$$

Para que esta simetría sea efectiva en el lagrangiano, en el término de acoplamiento a la corriente, es necesario que  $J$  sea efectivamente una corriente conservada,

$$J^\mu \tilde{A}_\mu = J^\mu A_\mu + J^\mu \partial_\mu \Lambda = J^\mu A_\mu - \underbrace{\partial_\mu J^\mu}_{CC} \Lambda + \underbrace{\partial_\mu (J^\mu \Lambda)}_{Div}. \quad (2.12)$$

#### 2.0.4. Momentos canónicos y singularidad

- La libertad de calibre de la teoría de Maxwell tiene otra faceta. En realidad el sistema tiene menos grados de libertad que los contenidos en el vector  $A$ .
- Se estudia la teoría en términos de  $A$  para mantener la covarianza explícita.
- Esta decisión trae consecuencias. No hay una forma evidente de construir el Hamiltoniano, los operadores de campo, relaciones de conmutación, etc.

En principio hay 4 momentos canónicos asociados a las 4 componentes del vector  $A$ .

$$\begin{aligned}
 \pi^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}_{Maxwell}}{\partial \partial_0 A_\mu} \\
 &= -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial \partial_0 A_\mu} \\
 &= -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^0 \delta_\beta^\mu - \delta_\beta^0 \delta_\alpha^\mu) \\
 &= F^{\mu 0}.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\pi^0 = F^{00} = 0 \quad (!) \tag{2.14}$$

$$\pi^i = F^{i0} \tag{2.15}$$

El momento asociado a  $A_0$  es cero automáticamente. Los momentos correspondientes a las componentes espaciales  $A_i$  son las componentes del campo eléctrico.

### 2.0.5. Lagrangiano a la Fermi

Para resolver este inconveniente se trabaja con el la siguiente densidad alternativa (Fermi)

$$\mathcal{L}_{Fermi} = -\frac{1}{2}\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - J^\mu A_\mu. \quad (2.16)$$

Las ecuaciones clásicas son:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - J^\nu = \square A^\nu - J^\nu = 0. \quad (2.17)$$

Esta ecuación de movimiento tiene propiedades interesantes

- En ausencia de fuentes es Klein-Gordon
- Es equivalente a la ecuación de movimiento del problema de Maxwell, si se cumple la condición de Lorenz,

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (2.18)$$

Fijar la condición  $\partial_\mu A^\mu = 0$  es posible si dada una versión arbitraria del campo  $A$ , se puede hallar una función escalar  $\Lambda$  que regrese el campo a la condición de Lorenz:

$$A^\mu = \tilde{A}^\mu + \partial^\mu \Lambda, \quad (2.19)$$

$$0 = \partial_\mu \tilde{A}^\mu + \partial_\mu \partial^\mu \Lambda, \quad (2.20)$$

$$\square \Lambda = -\partial_\mu \tilde{A}^\mu. \quad (2.21)$$

Es decir que la solución clásica ( $A$ ) de  $\mathcal{L}_{Fermi}$  puede transformarse en cualquier solución ( $\tilde{A}$ ) de  $\mathcal{L}_{Maxwell}$ .

### 2.0.6. Momentos canónicos a la Fermi

$$\begin{aligned} \pi^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}_{Fermi}}{\partial \partial_0 A_\mu} \\ &= -\partial^0 A^\mu \\ &= -\dot{A}^\mu. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Y se pueden escribir los corchetes de Poisson:

$$\{A_\mu(x^0, \vec{x}), \pi^\nu(x^0, \vec{x}')\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.23)$$

$$\{A_\mu(x^0, \vec{x}), \dot{A}^\nu(x^0, \vec{x}')\} = -\delta_\mu^\nu \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.24)$$

### 2.0.7. El plan

El plan es simple.

- Cuantizar la teoría de Fermi:
  - Sin invariancia de calibre.
  - Con un exceso de grados de libertad (con respecto a Maxwell).
  - Sin relevancia inmediata para el electromagnetismo.
- Imponer condiciones al espacio de estados, derivadas de la condición de Lorenz y recuperar los estados relevantes para describir la Mecánica Cuántica del Campo electromagnético.

### 2.0.8. Soluciones clásicas

Por simple inspección de la ecuación de movimiento, se puede proponer una solución expandida en una base de ondas planas:

$$A_\mu = A_\mu^+ + A_\mu^- \quad (2.25)$$

$$A_\mu(x) = \sum_r \int d^3k \frac{\varepsilon_r^\mu(\vec{k})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} (a_r(\vec{k})e^{-ik_\nu x^\nu} + a_r^\dagger(\vec{k})e^{ik_\nu x^\nu}) \quad (2.26)$$

con la condición,

$$k_0 = \omega_{\vec{k}} = |\vec{k}| \quad (2.27)$$

Los vectores  $\varepsilon_r$  ( $r:1..3$ ) forman una base para las direcciones del espacio tiempo e indican las posibles polarizaciones de la solución  $A$ . Se definen las constantes  $\zeta_0 = -1$ ,  $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1$  y se imponen estas condiciones

- Ortogonalidad:

$$\varepsilon_r^\mu(\vec{k})\varepsilon_{s\mu}(\vec{k}) = -\zeta_r\delta_{rs}. \quad (2.28)$$

Los vectores de polarización forman un conjunto ortogonal,  $\varepsilon_0(\vec{k})$  es tipo tiempo. El resto es tipo espacio.

- Completitud

$$\Sigma_r \zeta_r \varepsilon_r^\mu(\vec{k}) \varepsilon_r^\nu(\vec{k}) = -\eta^{\mu\nu}. \quad (2.29)$$

Para efectos prácticos se escoge una realización concreta de los vectores de polarización:

$$\varepsilon_0^\mu(\vec{k}) \equiv n^\mu \rightarrow (1, 0, 0, 0), \quad (2.30)$$

$$\varepsilon_r^\mu(\vec{k}) \rightarrow (0, \vec{\varepsilon}_r) \quad (r = 1, 2, 3), \quad (2.31)$$

$$\vec{\varepsilon}_3(\vec{k}) = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \quad (2.32)$$

$$\varepsilon_3^\mu(\vec{k}) = \frac{k^\mu - (nk)n^\mu}{\sqrt{(kn)^2 - k^2}}. \quad (2.33)$$

- La polarización  $\varepsilon_0$ , llamada tipo tiempo o escalar, está en la dirección temporal del observador.
- $\varepsilon_3$  es la polarización longitudinal y está en la dirección espacial del vector de onda  $k$ .
- Las polarizaciones  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  se denominan transversales y son dos direcciones espaciales mutuamente perpendiculares entre ellas y con el vector de onda  $k$ .



### 2.0.9. Cuantización

$$\hat{A}_\mu(x) = \sum_r \int d^3k \frac{\varepsilon_r^\mu(\vec{k})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} (\hat{a}_{r\vec{k}} e^{-ik_\nu x^\nu} + \hat{a}_{r\vec{k}}^\dagger e^{ik_\nu x^\nu}) \quad (2.34)$$

Cuantizamos los corchetes de Poisson, reemplazando por conmutadores (estadística de Bose):

$$\left[ \hat{A}_\mu(x^0, \vec{x}), \dot{\hat{A}}_\nu(x^0, \vec{x}') \right] = -i\eta_{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.35)$$

$$\left[ \hat{A}_\mu(x^0, \vec{x}), \hat{A}_\nu(x^0, \vec{x}') \right] = 0 \quad (2.36)$$

$$\left[ \dot{\hat{A}}_\mu(x^0, \vec{x}), \dot{\hat{A}}_\nu(x^0, \vec{x}') \right] = 0 \quad (2.37)$$

En términos de los operadores  $a$

$$\left[ \hat{a}_{r\vec{k}}, \hat{a}_{s\vec{k}'}^\dagger \right] = \zeta_r \delta_{rs} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (2.38)$$

$$\left[ \hat{a}_{r\vec{k}}, \hat{a}_{s\vec{k}'} \right] = 0 \quad (2.39)$$

$$\left[ \hat{a}_{r\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{s\vec{k}'}^\dagger \right] = 0 \quad (2.40)$$

### 2.0.10. Propagador de Feynman

Los conmutadores covariantes:

$$\left[ \hat{A}^\mu(x), \hat{A}^\nu(x') \right] = \lim_{m \rightarrow 0} (-\eta^{\mu\nu} \Delta(x - x')) = iD^{\mu\nu}(x - x') \quad (2.41)$$

Y el propagador de Feynman

$$\langle 0|T \left\{ \hat{A}^\mu(x), \hat{A}^\nu(x') \right\} |0 \rangle = \lim_{m \rightarrow 0} (-\eta^{\mu\nu} \Delta_F(x - x')) = iD_F^{\mu\nu}(x - x') \quad (2.42)$$

$$D_F^{\mu\nu}(x) = \frac{-\eta^{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k e^{-ikx}}{k^2 + i\epsilon} \quad (2.43)$$

### 2.0.11. Hamiltoniano

Se construye el hamiltoniano sustituyendo las expansiones de operadores en la expresión clásica, luego se ordena normalmente:

$$H = \sum_r \int d^3k \zeta_r \omega_{\vec{k}} \hat{a}_{r\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{r\vec{k}} \quad (2.44)$$

Atención al signo negativo de  $\zeta_0$ . ¿Energía negativa en fotones escalares?

Aplicamos a un estado de una partícula:

$$\begin{aligned}
 H\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger|0\rangle &= \sum_r \int d^3k' \zeta_r \omega_{\vec{k}'} \hat{a}_{r\vec{k}'}^\dagger \hat{a}_{r\vec{k}'} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger|0\rangle \\
 &= \sum_r \int d^3k' \zeta_r \omega_{\vec{k}'} \hat{a}_{r\vec{k}'}^\dagger (\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{r\vec{k}'} + [\hat{a}_{r\vec{k}'}, \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger])|0\rangle \\
 &= \sum_r \int d^3k' \zeta_r \omega_{\vec{k}'} \hat{a}_{r\vec{k}'}^\dagger (\zeta_r \delta_{rs} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'))|0\rangle \\
 &= \omega_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger|0\rangle
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Un estado de una partícula, independientemente de su polarización tiene energía positiva.

### 2.0.12. Estados de norma negativa y Gupta-Bleuler

No todo es alegría

- Seguimos usando el lagrangiano modificado. Esta no es la teoría de Maxwell.
- Hay que imponer la condición de Lorenz sobre los estados.
- Los estados que contienen un número impar de fotones escalares tienen norma negativa.

Receta

- Se restringe el espacio a aquellos estados que cumplan la condición  $\partial^\mu \hat{A}_\mu^+ |\Psi\rangle = 0$ . Se deriva:

$$\langle \Psi | \partial^\mu \hat{A}_\mu^- = 0, \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \partial^\mu \hat{A}_\mu | \Psi \rangle &= \langle \Psi | \partial^\mu \hat{A}_\mu^+ + \partial^\mu \hat{A}_\mu^- | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | \partial^\mu \hat{A}_\mu^+ | \Psi \rangle + \langle \Psi | \partial^\mu \hat{A}_\mu^- | \Psi \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

- En términos de los operadores de creación-destrucción:

$$(\hat{a}_{3\vec{k}} - \hat{a}_{0\vec{k}}) |\Psi\rangle = 0, \quad (2.48)$$

$$\langle \Psi | (\hat{a}_{3\vec{k}}^\dagger - \hat{a}_{0\vec{k}}^\dagger) = 0. \quad (2.49)$$

- Los estados permitidos deben tener superposiciones de estados con cantidades específicas de fotones escalares y longitudinales. Por ejemplo:
  - $|0\rangle$
  - Estados con modos transversos y nada más ( $r = 1, 2$ )

- $|\Psi_{1,1}\rangle = (\hat{a}_{3\vec{k}}^\dagger - \hat{a}_{0\vec{k}}^\dagger)|0\rangle$ .

- El vacío sigue siendo el estado sin ninguna partícula.

La receta de Gupta-Bleuler elimina las polarizaciones longitudinal y escalar de la consideración. Por ejemplo, en el cálculo de la energía de un estado permitido se tendrá la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 H|\Psi\rangle &= \sum_r \int d^3k \zeta_r \omega_{\vec{k}} \hat{a}_{r\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{r\vec{k}} |\Psi\rangle \\
 &= \int d^3k \omega_{\vec{k}} (\hat{a}_{1\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{1\vec{k}} + \hat{a}_{2\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{2\vec{k}} - \hat{a}_{0\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{0\vec{k}} + \hat{a}_{3\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{3\vec{k}}) |\Psi\rangle \\
 &= \int d^3k \omega_{\vec{k}} ((\hat{a}_{1\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{1\vec{k}} + \hat{a}_{2\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{2\vec{k}}) |\Psi\rangle + (-\hat{a}_{0\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{0\vec{k}} + \hat{a}_{3\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{0\vec{k}}) |\Psi\rangle) \\
 &= \int d^3k \omega_{\vec{k}} ((\hat{a}_{1\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{1\vec{k}} + \hat{a}_{2\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{2\vec{k}}) |\Psi\rangle + (\hat{a}_{3\vec{k}}^\dagger - \hat{a}_{0\vec{k}}^\dagger) \hat{a}_{0\vec{k}} |\Psi\rangle). \tag{2.50}
 \end{aligned}$$

Si se toma el valor esperado  $\langle \Psi | H | \Psi \rangle$ , los términos que contienen el factor de  $(\hat{a}_{3\vec{k}}^\dagger - \hat{a}_{0\vec{k}}^\dagger)$  se cancelan en vista de la condición impuesta sobre los estados. Para todos los efectos, el Hamiltoniano solo toma en cuenta las polarizaciones trasversas.

# Capítulo 3

## Lagrangiano electrodinámica cuántica y perturbaciones

Referencias importantes [1, 9]

- La corriente  $J$  en el lagrangiano de Maxwell es un campo externo. No tiene dinámica.
- Una posible solución es agregar un término con los grados de libertad de la corriente y escribir  $J$  en término de los nuevos campos.

- Hay más de una forma de hacerlo. Por ejemplo, electrodinámica escalar.
- Agregar densidad lagrangiana de Dirac y reemplazar la corriente genérica  $J$  en la densidad lagrangiana de Maxwell por la corriente conservada debida a la invariancia de fase  $\rightarrow$  Electrodinámica Cuántica.
- Problema: La invariancia de calibre requiere que la corriente conservada tenga divergencia nula antes de evaluar las ecuaciones de movimiento (es *off-shell*).
- Solución:
  - Considerar una dependencia del punto para la fase que transforma al campo de Dirac. “Calibrar la simetría”
  - Ajustar la dependencia con la función escalar en la transformación de calibre del campo  $A$ . La fase de  $\psi$  y la función escalar de  $A$  no son arbitrarias.
  - La invariancia de transformaciones de fase global no se pierde y la corriente conservada es la misma que se tenía en el caso de la teoría de Dirac pura. La corriente sigue siendo una corriente.

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{Maxwell} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \quad (3.1)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (3.2)$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + ie\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (3.3)$$

Transformaciones de calibre:

$$\tilde{\psi} = e^{-ie\Lambda}\psi, \quad (3.4)$$

$$\tilde{\bar{\psi}} = e^{ie\Lambda}\bar{\psi}, \quad (3.5)$$

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda. \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{\psi}}\gamma^\mu\tilde{D}_\mu\tilde{\psi} &= \tilde{\bar{\psi}}\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{\psi} + ie\tilde{\bar{\psi}}\gamma^\mu\tilde{\psi}\tilde{A}_\mu \\ &= e^{ie\Lambda}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu(e^{-ie\Lambda}\psi) + ie\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + ie\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\Lambda \\ &= \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu ie\Lambda)\psi + ie\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + ie\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\Lambda \\ &= \bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi \end{aligned} \quad (3.7)$$



### 3.1. Reglas de Feynman para QED

Recordemos:

- El problema es determinar los términos de la aproximación perturbativa de la matriz de dispersión (*scattering*).
- La matriz  $\hat{S}$  es una exponencial ordenada del hamiltoniano de interacción en el cuadro de interacción

$$\hat{S} = T e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_1^I(x)}. \quad (3.8)$$

- El término de interacción en QED es

$$\mathcal{H}_1^I(x) = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu. \quad (3.9)$$

- La expansión de  $\hat{S}$  tiene la forma

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n T((: \hat{\psi} \gamma^\mu \hat{\psi} \hat{A} :)_{x_1} \dots (: \hat{\psi} \gamma^\mu \hat{\psi} \hat{A} :)_{x_n}) \quad (3.10)$$

- El teorema de Wick nos indica como convertir los productos tiempo-ordenados de cada término en sumas de productos normalmente ordenados y términos de contracción.

- Cada partícula en el estado inicial tendrá un operador de campo de frecuencia positiva asociado (absorción):  $\hat{\psi}^+, \hat{\bar{\psi}}^+$  o  $\hat{A}^+$ .
- Cada partícula en el estado final tendrá un operador de campo de frecuencia negativa asociado (emisión):  $\hat{\psi}^-, \hat{\bar{\psi}}^-$  o  $\hat{A}^-$ .
- Cada contracción requiere un propagador de Feynman adecuado al tipo de partícula, conectado a los puntos correspondientes a los operadores contraídos

$$\hat{\psi}(x_2)\hat{\bar{\psi}}(x_1) \rightarrow iS_F(x_2 - x_1) \quad (3.11)$$

$$\hat{A}(x_2)\hat{A}(x_1) \rightarrow iD_F(x_2 - x_1) \quad (3.12)$$

### 3.1.1. Reglas

Contribución de orden  $n$ .

- Dibujar todos los diagramas de  $n$  vértices con la configuración externa correspondiente al proceso en estudio.
- Cada vértice tiene asociada una variable espacial  $x$ .
- Cada vértice aporta un factor  $-ie\gamma^\mu$ .

- Las líneas internas se asocian a un propagador de Feynman correspondiente al tipo de partícula.

- Intercambio de fermión

$$x \longrightarrow y \qquad iS_F(y-x) \qquad \bullet \longleftrightarrow \bullet$$

- Intercambio de fotón

$$x \rightsquigarrow y \qquad iD_F^{\mu\nu}(y-x) \qquad \bullet \longleftrightarrow \bullet$$

- Las líneas externas se asignan al operador de campo correspondiente. Según sean estados iniciales o finales y según el flujo de carga indicado por la flecha.

- Absorción de un electrón

$$\longrightarrow x \qquad \hat{\psi}^+(x) \qquad e \rightarrow \bullet$$

- Absorción de positrón

$$\longleftarrow x \qquad \hat{\bar{\psi}}^+(x) \qquad \bar{e} \rightarrow \bullet$$

- Emisión de un electrón

$$x \longrightarrow \qquad \hat{\psi}^-(x) \qquad \bullet \rightarrow e$$

- Emisión de un positrón

$$x \longleftarrow \hat{\psi}^-(x) \quad \bullet \rightarrow \bar{e}$$

- Absorción de un fotón

$$\text{~~~~~} x \quad \hat{A}^+(x) \quad \gamma \rightarrow \bullet$$

- Emisión de un fotón

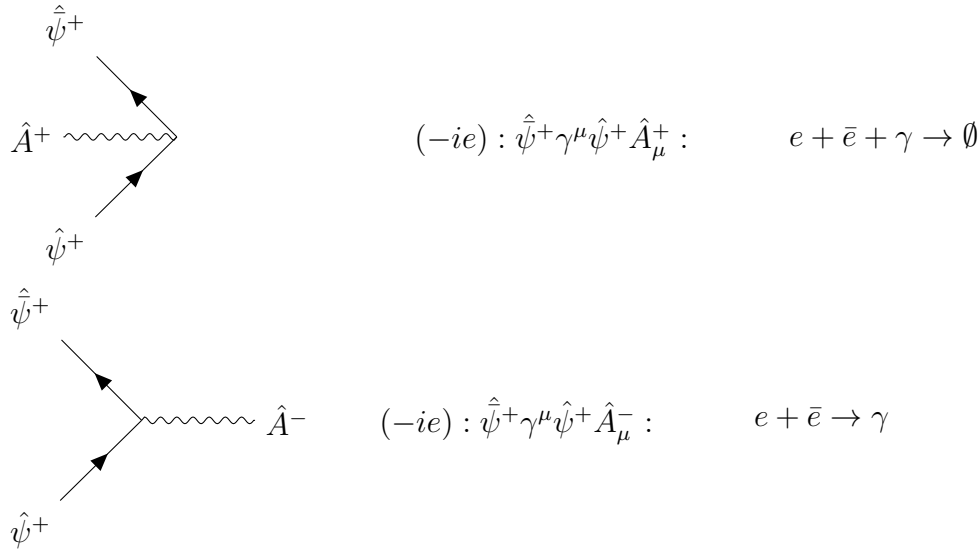
$$x \text{~~~~~} \quad \hat{A}^-(x) \quad \bullet \rightarrow \gamma$$

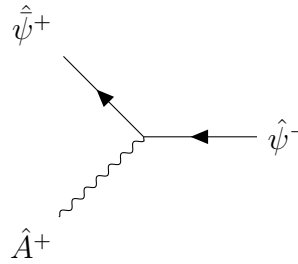
- Se integran las  $n$  coordenadas.

### 3.1.2. Ejemplo $n = 1$

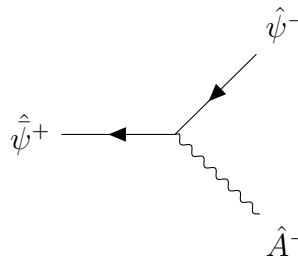
- El primer término  $\hat{S}^1$  ya está ordenado normalmente.
- Solo hay un vértice.
- No hay líneas internas.
- El producto de los tres campos, con frecuencias positiva y negativa, produce  $2^3 = 8$  combinaciones diferentes.

- Todas las contribuciones son nulas debido a la conservación del momento lineal.

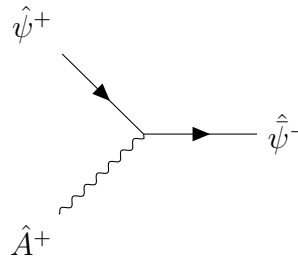




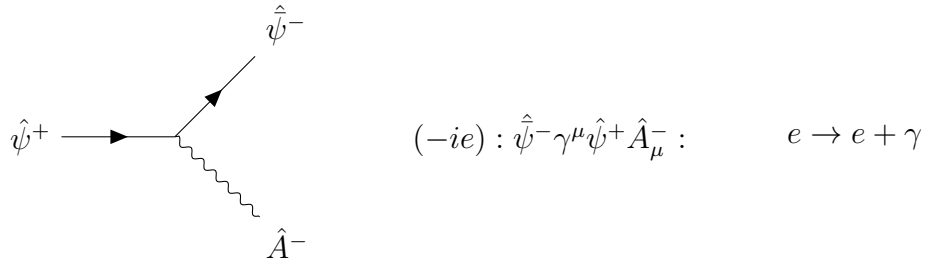
$(-ie) : \hat{\psi}^+ \gamma^\mu \hat{\psi}^- \hat{A}_\mu^+ :$        $\gamma + \bar{e} \rightarrow \bar{e}$



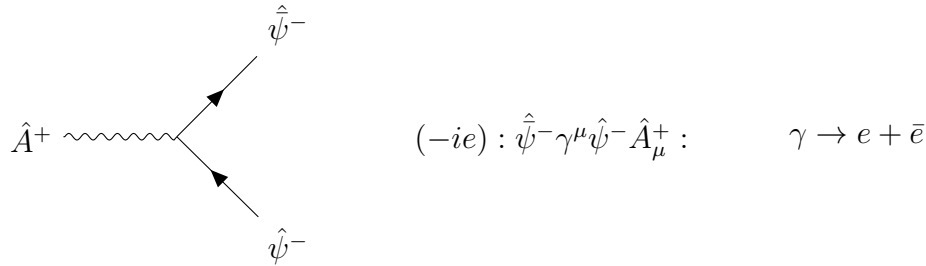
$(-ie) : \hat{\psi}^+ \gamma^\mu \hat{\psi}^- \hat{A}_\mu^- :$        $\bar{e} \rightarrow \bar{e} + \gamma$



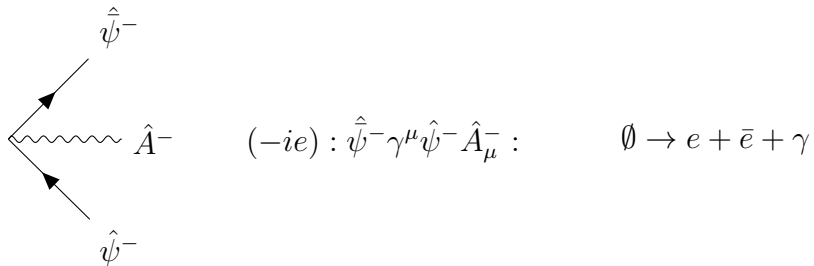
$(-ie) : \hat{\psi}^- \gamma^\mu \hat{\psi}^+ \hat{A}_\mu^+ :$        $\gamma + e \rightarrow e$



$$(-ie) : \hat{\psi}^- \gamma^\mu \hat{\psi}^+ \hat{A}_\mu^- : \quad e \rightarrow e + \gamma$$



$$(-ie) : \hat{\psi}^- \gamma^\mu \hat{\psi}^- \hat{A}_\mu^+ : \quad \gamma \rightarrow e + \bar{e}$$

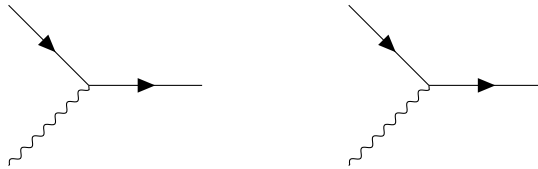


$$(-ie) : \hat{\psi}^- \gamma^\mu \hat{\psi}^- \hat{A}_\mu^- : \quad \emptyset \rightarrow e + \bar{e} + \gamma$$

### 3.1.3. Diagramas a orden $n = 2$

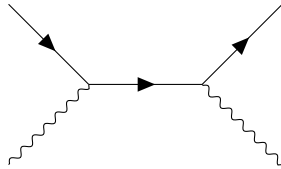
A segundo orden hay dos vértices y son posibles más combinaciones de líneas externas e internas.  
Algunos ejemplos:

- 6 líneas externas 0 líneas internas



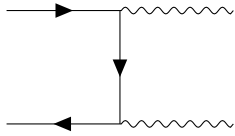
- 4 líneas externas, 1 línea interna (fermión)

Tipo  $\gamma + e \rightarrow \gamma + e$

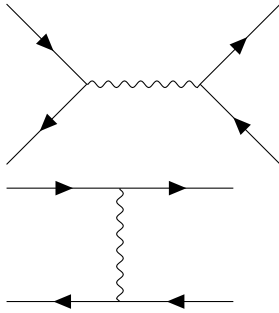


Tipo  $\bar{e} + e \rightarrow \gamma + \gamma$

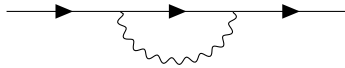




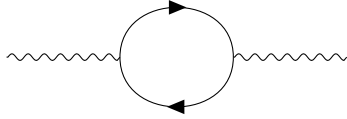
- 4 líneas externas, 1 línea interna (fotón)



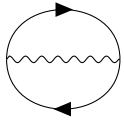
- 2 líneas externas, 2 líneas internas (fermión + fotón)



- 2 líneas externas, 2 líneas internas (2 fermiones)



- 0 líneas externas, 3 líneas internas



# Bibliografía

- [1] Franz Mandl and Graham Shaw. *Quantum field theory*. John Wiley & Sons, 2010.
- [2] Michael Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.
- [3] James D Bjorken and Sidney David Drell. *Relativistic quantum mechanics*. 1964.
- [4] James D Bjorken and Sidney David Drell. *Relativistic quantum fields*. McGraw-Hill, 1965.
- [5] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields*, volume 2. Cambridge university press, 1995.
- [6] Mark Thomson. *Modern particle physics*. Cambridge University Press, 2013.
- [7] RAE ASALE. jurungar — diccionario de la lengua española, 2021.

- [8] John David Jackson. Classical electrodynamics, 1999.
- [9] Walter Greiner and Joachim Reinhardt. *Field quantization*. Springer Science & Business Media, 2013.