# Electrodinámica perturbativa

## Algunos elementos

J. Stephany[1]

[1]Departamento de Física
Universidad Simón Bolívar
Caracas, Venezuela

LA-CoNGA, Módulo de Teoría, Clase 22

# Contenidos

# Sección de choque de Møller

Con $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ vimos que la seccion de choque de Møller es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2(2E^2 - m^2)^2}{4E^2(E^2 - m^2)^2}\left[\frac{4}{\operatorname{sen}^4\theta} - \frac{3}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{(E^2 - m^2)^2}{(2E^2 - m^2)^2}\left(1 + \frac{4}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\right]$$

En el limite relativista $E \to \infty$

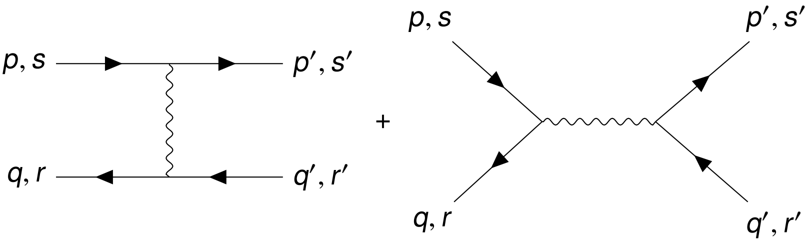
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{E^2}\left[\frac{4}{\operatorname{sen}^4\theta} - \frac{2}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{1}{4}\right]$$

En el limite no relativista $E \to \infty$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 m^2}{4(E^2 - m^2)^2}\left[\frac{4}{\operatorname{sen}^4\theta} - \frac{3}{\operatorname{sen}^2\theta}\right] = \frac{\alpha^2 m^2}{p^2}\left[\frac{4}{\operatorname{sen}^4\theta} - \frac{3}{\operatorname{sen}^2\theta}\right]$$

# Sección de choque de Bhabha

$$e^+e^- \to e^+e^-$$




La amplitud

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_M &= -i(-ie)^2\Big( - \frac{[\bar{u}(p',s')\gamma^\mu u(s,p)][\bar{v}(q,r)\gamma_\mu v(q',r')]}{(p-p')^2} \\ &+ \frac{[\bar{v}(q,r)\gamma^\mu u(p,s)][\bar{u}(s',p')\gamma_\mu v(q',r')]}{(p+q)^2}\Big). \end{aligned}$$

# Sección de choque de Bhabha

Por el mismo procedimiento la sección de choque en el límite de altas energías es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8E^2}\Big(\frac{1+\cos^4\theta/2}{\operatorname{sen}^4\theta/2} + \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) - 2\frac{\cos^4\theta/2}{\operatorname{sen}^2\theta/2}\Big)$$

En el límite no relativista

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{16E^2\operatorname{sen}^4\theta/2}$$

que corresponde a la sección de choque de Rutherford

# Fermiones

Podemos considerar la interacción del campo electromagnetico con otros fermiones. Por ejemplo muones, protones , etc.
Con un ligero cambio de notación tenemos

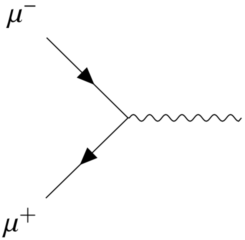
$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}_e(i\gamma^\mu D_\mu - m_e)\psi_e \\ &+ \bar{\psi}_m(i\gamma^\mu D_\mu - m_m)\psi_m + \bar{\psi}_p(i\gamma^\mu D_\mu - m_p)\psi_p + \dots\end{aligned}$$

El hamiltoniano de interacción es ahora

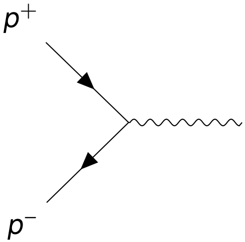
$$H_I = e\int d^3x\Big[\bar{\psi}_e\gamma^\mu A_\mu\psi_e + \bar{\psi}_m\gamma^\mu A_\mu\psi_m - \bar{\psi}_p\gamma^\mu A_\mu\psi_p + \dots\Big]$$

# vertices

Tenemos ahora vértices adicionales




$$-ie\gamma_\mu$$

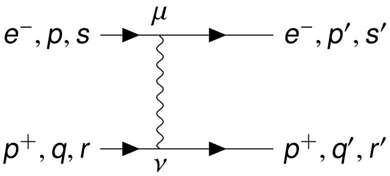



$$ie\gamma_\mu$$

# Scattering coulombiano

Consideremos ahora el proceso $e^- p^+ \to e^- p^+$ en el cual las partículas son distinguibles. Como vimos tenemos que considerar la amplitud

$i\mathcal{M} \quad =$




$$\overline{|\mathcal{M}|}^2 = \frac{e^4}{64 m^4} \left\{ \frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu(\not{p} + m_e)\gamma^\nu(\not{p}' + m_e)\right] \mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu(\not{q} + m_p)\gamma_\nu(\not{q}' + m_p)\right]}{\left[(p - p')^2\right]^2} \right\}$$

# Correcciones a la fórmula de Rutherford

Como $m_p >> m_e$ podemos suponer a no muy altas energías ($E < m_p$) que el protón no se mueve. El sistema de centro de masas es el sistema de laboratorio donde los protones están en reposo. En ese límite se encuentra que,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4v^2|\mathbf{p}|^2 \operatorname{sen}^4 \theta/2}\Big(1 - v^2 \operatorname{sen}^2 \theta/2\Big), \quad v = \frac{|\mathbf{p}|}{E}$$

que se conoce como la fórmula de Mott. Para $|\mathbf{p}| << E$ se tiene

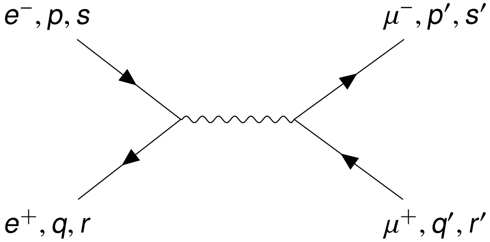
$$E \sim m_e \quad , \quad v = \frac{|\mathbf{p}|}{m_e} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 m_e^2}{4|\mathbf{p}|^4 \operatorname{sen}^4 \theta/2}$$

# Producción de muones

Como la siguiente ilustración consideremos ahora el proceso

$$e^+ e^- \to \mu^+ \mu^-$$

$$\overline{|\mathcal{M}|}^2 \quad =$$




$$\overline{|\mathcal{M}|}^2 = \frac{e^4}{64 m^4} \left\{ \frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu (\not{q} - m_e)\right] \mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu (\not{q}' - m_m) \gamma_\nu (\not{p}' + m_m)\right]}{\left[(p - p')^2\right]^2} \right\}$$

# Producción de muones

En este caso como las masas son diferentes los términos cinemáticos en la sección de choque son ligeramente diferentes y resulta,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{|\mathbf{p}'|}{32\pi^2 E_{CM}^3}|\overline{\mathcal{M}_M}|^2$$

La conservación de la energía garantiza que la sección de choque se anula para $E < m_m$. Calculando las trazas e introduciendo la parametrización de los momentos en términos del ángulo de scattering $\theta$ se encuentra ($m_e = 0$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{16E^2}\sqrt{1-\frac{m_m^2}{E^2}}\left[\left(1+\frac{m_m^2}{E^2}\right)+\left(1-\frac{m_m^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right]$$

Integrando ($E > m_\mu$)

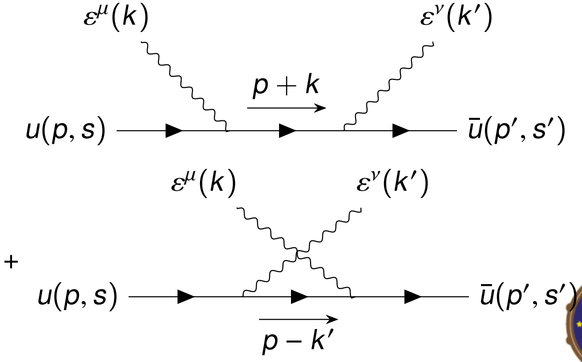
$$\sigma = \frac{\pi\alpha^2}{3}\sqrt{1-\frac{m_m^2}{E^2}}\left(1+\frac{m_m^2}{2E^2}\right)$$

# Scattering de Compton

Como última aplicación volvamos a QED y consideremos el scattering de fotones por electrones

$$\gamma e^- \to \gamma e^- .$$

Tenemos los diagramas



Usando las reglas de Feynman queda la amplitud

$$i\mathcal{M} = -ie^2 \varepsilon^*_\mu(k)\varepsilon_\nu(k)\bar{u}(p',s')\Big[\frac{\gamma^\mu(\not p + \not k + m)\gamma^\nu}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\mu(\not p - \not k' + m)\gamma^\nu}{(p-k')^2 - m^2}\Big]u(p,s)$$

- Se promedia sobre el espín del electrón
- Se promedia sobre las polarizaciones de los fotones con la regla

$$\sum_{polarizaciones} \varepsilon^*_\mu(k)\varepsilon_\nu(k) \to -\eta_{\mu\nu}$$

que dentro de las amplitudes se justifica por

- Conservación de la corriente
- Identidad de Ward-Takahashi

# Scattering de Compton

La amplitud promediada es

$$|\overline{\mathcal{M}_C}|^2 \;=\; 2e^4\Big[\frac{p.k'}{p.k}+\frac{p.k}{p.k'}+2m^2\Big(\frac{1}{p.k}-\frac{1}{p.k'}\Big)+m^4\Big(\frac{1}{p.k}-\frac{1}{p.k'}\Big)\Big]$$

El cálculo de la sección de choque se realiza en este caso en el sistema de laboratorio donde el electrón está en reposo. Llamando $\theta$ al ángulo de dispersión del fotón, por conservación del momentum se encuentra la relación de Compton

$$\frac{1}{\omega'}-\frac{1}{\omega}=\frac{1}{m}(1-\cos\theta)$$

Para la sección de choque se halla,

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}=\frac{\pi\alpha^2}{m^2}\Big(\frac{\omega'}{\omega}\Big)^2\Big[\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\operatorname{sen}^2\theta\Big]$$

# Scattering de Compton

Para $\omega \to 0$, $\omega'/\omega \to 1$

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}[1 + \cos^2\theta]$$

$$\sigma = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}$$

Esto último corresponde a la sección de scattering de Thomson de una onda plana en electromagnetismo clásico.

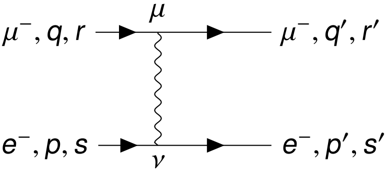
# Crossing symmetry

Consideremos ahora el scattering de electrones y muones

$$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$$

A mas bajo orden tenemos el diagrama

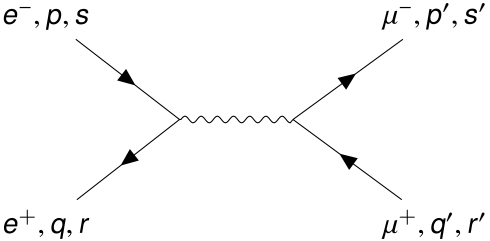
$i\mathcal{M} \quad =$




Observamos que este gráfico se obtiene si se hace una rotación de 90 grados en sentido antihorario al gŕafico del proceso $e^+e^- \to \mu^-\mu^+$ y se hacen las sustituciones

$$p \to p \quad , \quad q \to -p' \quad , \quad p' \to q' \quad , \quad q' \to -q$$

# Crossing symmetry




Con la sustitución las variables de Mandelstam también cambian

$$s = (p+q)^2 \rightarrow (p-p')^2 = t \quad , \quad t = (p-p')^2 \rightarrow (p-q')^2 = u$$

$$u = (p-q')^2 \rightarrow (p+q)^2 = s$$

# Crossing symmetry

En el límite de masa cero las correspondientes amplitudes son

$$e^-e^+ \to \mu^-\mu^+ \qquad \overline{|M|^2} = \frac{8e^2}{s^2}\left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2\right]$$

$$e^-\mu^- \to e^-\mu^- \qquad \overline{|M|^2} = \frac{8e^2}{t^2}\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2\right]$$

En QED las reglas de substitución permiten relacionar

Scattering de Møller $\longrightarrow$ Scattering de Bhabba

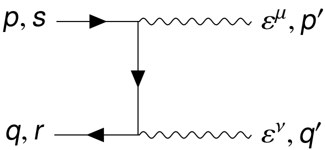
Scattering de Compton $\longrightarrow$ Aniquilación de pares

# Aniquilación de pares

Para la aniquilación de pares

$$e^+e^- \to \gamma\gamma.$$

tenemos el diagrama




Y la amplitud

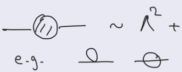
$$i(-ie)^2\left(\frac{[\bar{v}(q,r)\gamma^\nu(\not{p}-\not{p}'+m)\gamma^\mu u(p,s)]}{(p-p')^2-m^2}\right)\varepsilon^\mu(p')\varepsilon^\nu(q').$$

# Divergencias

## Clase 13

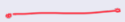
Recap clase 12

Divergencias en $\lambda\phi^4$ , $D = 4 - E$ grado de divergencia superficial

$D=2$ $E=2$  $\sim \Lambda^2 + k^2 \log \Lambda$ e.g.

$D=4$ $E=0$  $\sim \log \Lambda$ e.g.

divergencias ocurren en funciones de correlación con términos a nivel árbol, i.e con términos en $\mathcal{L}$

$G^{(2)}$  $\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$

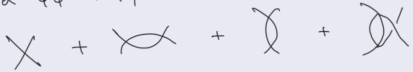
$G^{(4)}$  $\frac{\lambda}{4!}\phi^4$

señal que las divergencias se pueden absorber en renormalización de los coeficientes de $\mathcal{L}$

## Clase 13

Renormalización

* amplitud $\phi\phi \to \phi\phi$

$i\mathcal{M} =$  $+\ O(\lambda^3)$

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\left(\log\frac{\Lambda^2}{s} + \log\frac{\Lambda^2}{t} + \log\frac{\Lambda^2}{u}\right) + O(\lambda^3)$$

$$i\mathcal{M}\Big|_{s_0,u_0,t_0} = -i\lambda_R$$

la amplitud define una constante de acoplo renormalizada o física

$$\Rightarrow \lambda = \lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\left(\log\frac{\Lambda^2}{s_0} + \log\frac{\Lambda^2}{t_0} + \log\frac{\Lambda^2}{u_0}\right) + O(\lambda_R^3)$$ y sustituyendo

$$i\mathcal{M} = -i\lambda_R + \frac{i\lambda_R^2}{32\pi^2}\left(\log\frac{s_0}{s} + \log\frac{t_0}{t} + \log\frac{u_0}{u}\right) + O(\lambda_R^3)$$

finita, independiente de $\Lambda$

# Divergencias

## Clase 13

$*$ $\tilde{G}^{(2)} =$  $+$  $+ \; O(\lambda^2)$

$$= \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}\left(i\lambda C_1 \Lambda^2\right)\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \cdots$$

$$= \frac{i}{k^2 - m^2 + \lambda_1 C_1 \Lambda^2 + i\epsilon} = \frac{i}{k^2 - m_R^2 + i\epsilon}$$

polo en $k^2 = m_R^2$

$m_R^2$ : masa renormalizada ó masa física $\qquad m_R^2 = m^2 - \lambda C_1 \Lambda^2$

A orden $\lambda^2$ aparece  con divergencia $i\lambda^2\left(C_2 \Lambda^2 + C_3 k^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2}\right)$

$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$

Se absorbe en renormalización del campo

$$\phi_R = \sqrt{1 + C_3 \lambda^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2}}\; \phi$$

# Divergencias

Al calcular las correcciones de orden superior a los procesos que discutimos anteriormente en Electrodinámica cuántica también aparecen cantidades divergentes asociadas a los diagramas con lazos las cuales requieren que la teoría sea renormalizada

- Se requiere renormalizar la masa del electrón
- Se requiere renormalizar el vértice de interacción
- Se requiere renormalizar la intensidad de campo

# Auto-energía del electron

El propagador exacto de los fermiones

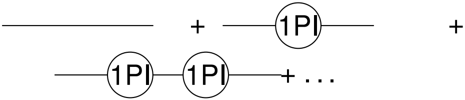
$$S(k) = \int d^4y\ e^{ik\cdot y} \langle\Omega|\, \psi(y)\bar{\psi}(0)\,|\Omega\rangle\,,$$

Definimos los diagramas irreducibles de una partícula como aquellos de dos líneas externas que no se pueden separar haciendo un único corte. En forma simbólica

$$\text{1PI} \quad = \quad \Sigma(\not{k})$$

El desarrollo propagador que es la suma de todos los diagramas puede reorganizarse en la forma

$S(k) =$



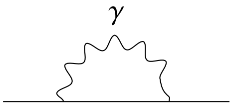

$$
\begin{aligned}
S(k) \sim & \frac{1}{i\not{k} + m} + \frac{1}{i\not{k} + m}\Sigma(\not{k})\frac{1}{i\not{k} + m} \\
& + \frac{1}{i\not{k} + m}\Sigma(\not{k})\frac{1}{i\not{k} + m}\Sigma(\not{k})\frac{1}{i\not{k} + m} + \cdots \\
& = \frac{1}{i\not{k} + m - \Sigma(\not{k})}.
\end{aligned}
$$

# Auto-energía del electron

El polo del propagador corresponde a la masa física $m$ ($m_0$ es el parámetro en el lagrangiano) y es la solución de la ecuación

$$[\not{k} - m_0 - \Sigma(\not{k})]_{\not{k}=m} = 0$$

Hasta primer orden en $\alpha$ solo contribuye el diagrama




Este diagrama tiene una divergencia infrarroja por el propagador del fotón y una divergencia ultravioleta que hay que regularizar. El procedimiento es la generalización del discutido para la teoría escalar. Se encuentra

$$\delta m = m - m_0 = \underset{\Lambda\to\infty}{\to} \frac{3\alpha}{4\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_0^2}\right)$$

# Propagador del fotón

Un tratamiento análogo nos lleva a calcular el propagador del fotón. En términos del propagador libre

$$D_{\mu\nu}(q) = \frac{1}{q^2}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right),$$

escribimos el propagador completo

$$\Delta_{\mu\nu}(q) = D_{\mu\nu}(q) + D_\mu^\rho(q)\Pi_\rho^\sigma(q)D_{\sigma\nu}(q) + D_\mu^\rho \Pi_\rho^\sigma D_\sigma^\lambda \Pi_\lambda^\kappa D_{\kappa\nu} + \cdots ,$$

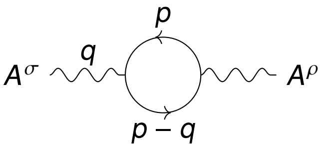
con $\Pi_{\rho\sigma}(q)$ la autoenergía del fotón que se escribe en términos de los diagramas irreducibles de una partícula. Toma la forma

$$\Pi_\rho^\sigma(q) = q^2\left(\delta_\rho^\sigma - \frac{q_\rho q^\sigma}{q^2}\right)\pi(q^2)$$

para una cierta función $\pi(q^2)$.

# Propagador del fotón

El primer término no trivial de $\Pi_{\rho\sigma}(q)$ viene del gráfico

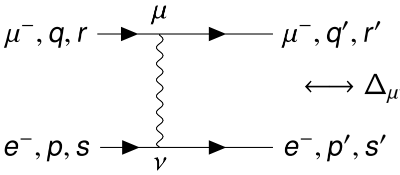



$$\Pi_{\rho\sigma}(q) = e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left( \frac{(-i\not{p} + m)\gamma^\rho}{p^2 + m^2} \frac{-i(\not{p} - \not{q} + m)\gamma^\sigma}{(p - q)^2 + m^2} \right)$$

Este gráfico es divergente y despues de regularizarlo y renormalizarlo nos lleva al cálculo de $\pi(q)$

Para ver una de las implicaciones de esto consideremos de nuevo el scattering de fermiones distinguibles

$i\mathcal{M} \quad =$




$\longleftrightarrow \Delta_{\mu\nu}$

Si repetimos el cálculo para encontrar el potencial asociado resulta

$$V(\mathbf{r}) = e^2 \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left( \frac{1 + \pi(|\mathbf{q}|^2)}{|\mathbf{q}|^2} \right) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}.$$

Para $|\mathbf{q}|^2 \ll m_e^2$.

$$V(\mathbf{r}) = e^2 \left( \frac{1 + \pi(0)}{4\pi r} + \frac{g^2}{60\pi^2 m^2} \delta^3(\mathbf{r}) \right)$$