

Clase 23

Gabriela Navarro

Módulo de Teoría Filial Física de Partículas

13 de abril 2021



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea





Construyendo el Modelo Estándar: QCD

| | | | | |
|----------------|---|---|---|--|
| | <p>mass $\approx 2.4 \text{ MeV}/c^2$</p> <p>charge $2/3$</p> <p>spin $1/2$</p> <p>u</p> <p>up</p> | <p>mass $\approx 1.275 \text{ GeV}/c^2$</p> <p>charge $2/3$</p> <p>spin $1/2$</p> <p>c</p> <p>charm</p> | <p>mass $\approx 172.44 \text{ GeV}/c^2$</p> <p>charge $2/3$</p> <p>spin $1/2$</p> <p>t</p> <p>top</p> | <p>0</p> <p>0</p> <p>1</p> <p>g</p> <p>gluon</p> |
| QUARKS | <p>mass $\approx 4.8 \text{ MeV}/c^2$</p> <p>charge $-1/3$</p> <p>spin $1/2$</p> <p>d</p> <p>down</p> | <p>mass $\approx 95 \text{ MeV}/c^2$</p> <p>charge $-1/3$</p> <p>spin $1/2$</p> <p>s</p> <p>strange</p> | <p>mass $\approx 4.18 \text{ GeV}/c^2$</p> <p>charge $-1/3$</p> <p>spin $1/2$</p> <p>b</p> <p>bottom</p> | <p>0</p> <p>0</p> <p>1</p> <p>γ</p> <p>photon</p> |
| | <p>mass $\approx 0.511 \text{ MeV}/c^2$</p> <p>charge -1</p> <p>spin $1/2$</p> <p>e</p> <p>electron</p> | <p>mass $\approx 105.67 \text{ MeV}/c^2$</p> <p>charge -1</p> <p>spin $1/2$</p> <p>μ</p> <p>muon</p> | <p>mass $\approx 1.7768 \text{ GeV}/c^2$</p> <p>charge -1</p> <p>spin $1/2$</p> <p>τ</p> <p>tau</p> | <p>0</p> <p>1</p> <p>Z</p> <p>Z boson</p> |
| LEPTONS | <p>mass $< 2.2 \text{ eV}/c^2$</p> <p>charge 0</p> <p>spin $1/2$</p> <p>ν_e</p> <p>electron neutrino</p> | <p>mass $< 1.7 \text{ MeV}/c^2$</p> <p>charge 0</p> <p>spin $1/2$</p> <p>ν_μ</p> <p>muon neutrino</p> | <p>mass $< 15.5 \text{ MeV}/c^2$</p> <p>charge 0</p> <p>spin $1/2$</p> <p>ν_τ</p> <p>tau neutrino</p> | <p>0</p> <p>± 1</p> <p>1</p> <p>W</p> <p>W boson</p> |
| | | | | GAUGE BOSONS |

Interacción Fuerte



4. Descripción de la Cromodinámica cuántica

QCD



Calendario y Bibliografía

Clase 1: dispersión elástica electrón - protón

Clase 2: dispersión inelástica profunda, estructura del protón

Clase 3: QCD

Clase 4: QCD perturbativa, colisiones hadrónicas

Bibliografía

1.) Modern Particle Physics, M. Thomson, Cambridge University Press, 2013.

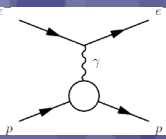
2.) Quarks and Leptons, an introductory course in Modern Particle Physics, F. Halzen y A. Martin, John Wiley & sons, 1984

3.) Foundations of Quantum Chromodynamics, an Introduction to Perturbative method in gauge theories, T. Muta, World Scientific, 1998.

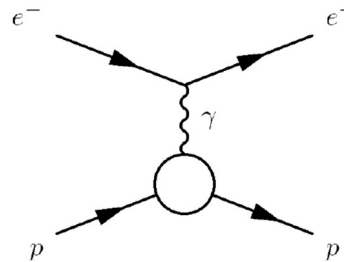
4.) Introduction to elementary particles, D. Griffiths, John Wiley & sons, 2008.



Dispersión electrón-protón



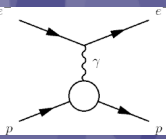
- La dispersión electrón-protón es una gran herramienta para estudiar la estructura del protón.



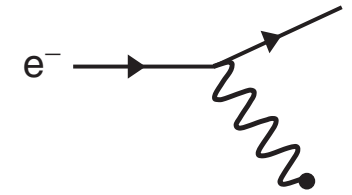
- A bajas energías el proceso dominante es la dispersión elástica, donde el protón permanece intacto -> **permite estudiar propiedades globales del protón**
- A altas energías el proceso dominante es la dispersión inelástica profunda, donde el protón se rompe -> **permite estudiar la distribución de momento de los quarks constituyentes del protón.**
- La naturaleza del proceso $e^-p \rightarrow e^-p$ depende de la longitud de onda del fotón virtual en comparación con el radio del protón.



Dispersión electrón-protón

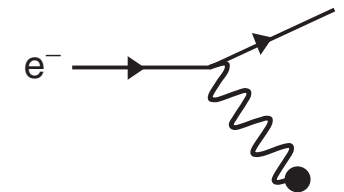


- A muy baja energía:
 - ▶ Electrón no relativista, $\lambda_\gamma \gg r_p$
 - ▶ $e^-p \rightarrow e^-p$: dispersión elástica del electrón en el potencial estático del protón.



$$\lambda \gg r_p$$

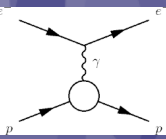
- A energías un poco más altas:
 - ▶ $\lambda_\gamma \sim r_p$
 - ▶ $e^-p \rightarrow e^-p$: dispersión no puramente electrostática y el cálculo de la sección eficaz requiere tener en cuenta la distribución de carga y de momento magnético del protón



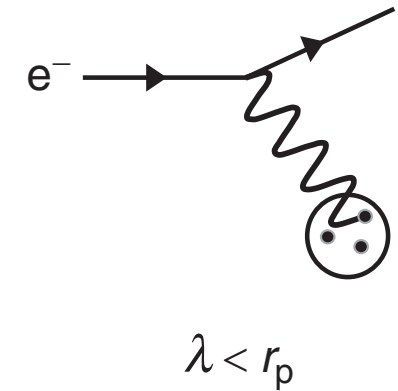
$$\lambda \sim r_p$$



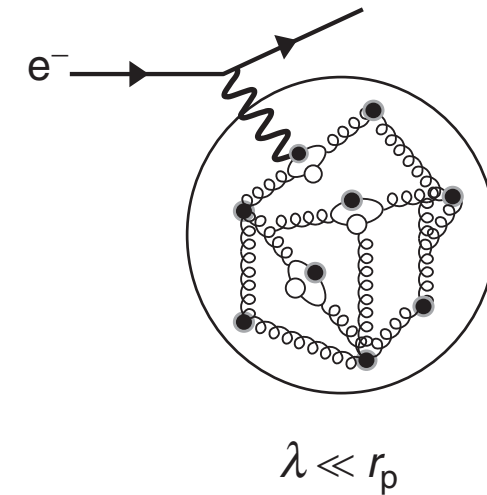
Dispersión electrón-protón



- Cuando la $\lambda_\gamma < r_p$
 - ▶ La sección eficaz elástica se hace pequeña
 - ▶ $e^-p \rightarrow e^-p$: dispersión inelástica donde el fotón virtual interactúa con un quark constituyente del protón y éste se "rompe".

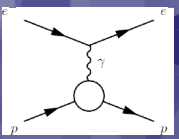


- A muy altas energías:
 - ▶ $\lambda_\gamma \ll r_p$
 - ▶ λ_γ es suficientemente pequeña como para determinar la estructura dinámica del protón en forma detallada.
 - ▶ Se parece ser un mar de quarks y gluons interactuando fuertemente.





Dispersión elástica electrón-protón

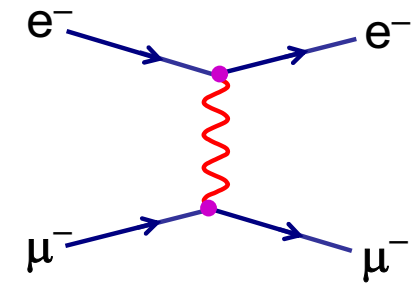


- Las dispersiones de Rutherford y Mott son los límites de menor energía de la dispersión elástica electrón - protón.
- La energía del electrón es tan baja que la energía cinética del protón es despreciable (comparada con su masa en reposo).
- El protón se considera como una fuente fija con potencial electrostático $1/r$.
- La sección eficaz la calcularemos tratando al protón como una partícula puntual de Dirac (aproximación razonable ya que $\lambda_\gamma \gg r_p$)



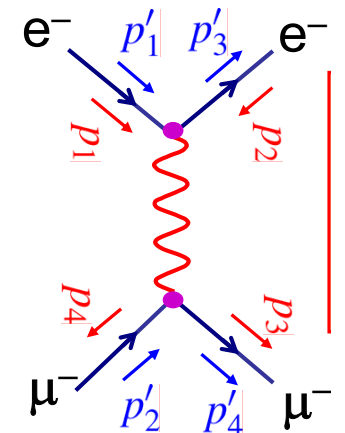
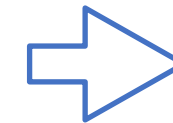
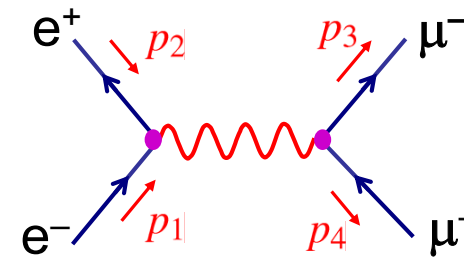
Dispersión $ee \rightarrow \mu\mu$ y $e\mu \rightarrow e\mu$ (revisited)

- Vamos a repasar la dispersión de dos partículas puntuales $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ (parte de QED de $e^- q \rightarrow e^- q$)

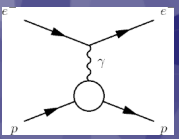


- Dos formas de proceder:
 - Hacemos los cálculos usando las reglas de QED desde el comienzo.
 - Tomamos el resultado de $e^- e^- \rightarrow \mu^- \mu^-$ y usando la simetría de cruce obtenemos el elemento de matriz de $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

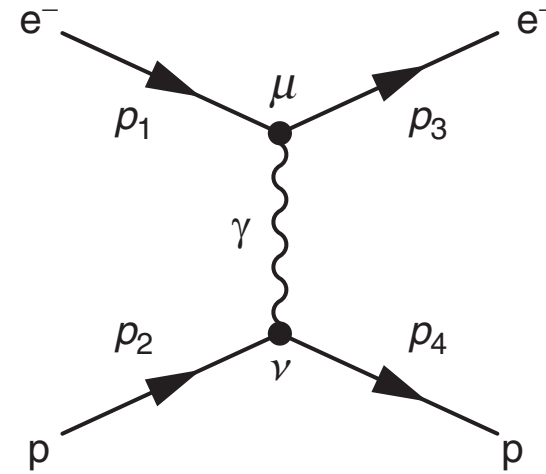
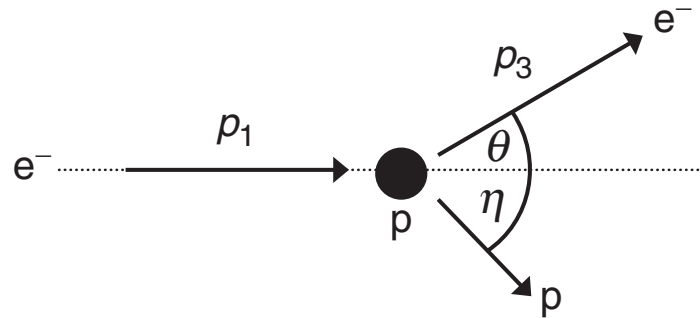
- El resultado para el elemento de matriz al cuadrado:



$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{8e^4}{(p_1 - p_3)^4} [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)^2]$$



Dispersión de Rutherford



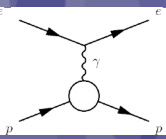
Elemento de matriz correspondiente al diagrama de Feynman:

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{Q_q e^2}{q^2} [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1)] g_{\mu\nu} [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2)]$$

Espinores de Dirac

$$u_\uparrow = \sqrt{E + m_e} \begin{pmatrix} c(\theta/2) \\ s(\theta/2)e^{i\phi} \\ \frac{p}{E + m_e} c(\theta/2) \\ \frac{p}{E + m_e} s(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

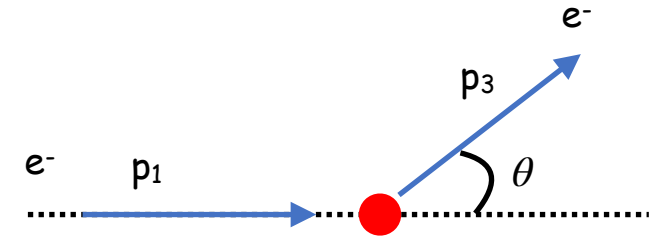
$$u_\downarrow = \sqrt{E + m_e} \begin{pmatrix} -s(\theta/2) \\ c(\theta/2)e^{i\phi} \\ \frac{p}{E + m_e} s(\theta/2) \\ -\frac{p}{E + m_e} c(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}$$



Dispersión de Rutherford

$$u_{\uparrow} = \sqrt{E + m_e} \begin{pmatrix} c(\theta/2) \\ s(\theta/2)e^{i\phi} \\ \frac{p}{E+m_e}c(\theta/2) \\ \frac{p}{E+m_e}s(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

$$u_{\downarrow} = \sqrt{E + m_e} \begin{pmatrix} -s(\theta/2) \\ c(\theta/2)e^{i\phi} \\ \frac{p}{E+m_e}s(\theta/2) \\ -\frac{p}{E+m_e}c(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}$$



Despreciamos el retroceso del protón

Consideramos el ángulo azimutal del electrón cero $\phi = 0$

Los estados posibles iniciales y finales de los espines del electrón son:

$$u_{\uparrow}(p_1) = \sqrt{E + m_e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m_e} \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_{\downarrow}(p_1) = \sqrt{E + m_e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{p}{E+m_e} \end{pmatrix}$$

$$u_{\uparrow}(p_3) = \sqrt{E + m_e} \begin{pmatrix} c(\theta/2) \\ s(\theta/2) \\ \frac{p}{E+m_e}c(\theta/2) \\ \frac{p}{E+m_e}s(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$u_{\downarrow}(p_3) = \sqrt{E + m_e} \begin{pmatrix} -s(\theta/2) \\ c(\theta/2) \\ \frac{p}{E+m_e}s(\theta/2) \\ -\frac{p}{E+m_e}c(\theta/2) \end{pmatrix}$$

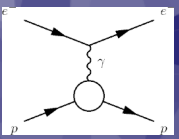
α

Límite no relativista : $\alpha \rightarrow 0$ ($p \ll E$)

Límite ultra relativista : $\alpha \rightarrow 1$ ($E \gg m$)



Dispersión elástica electrón-protón



Dispersión de Rutherford

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{Q_q e^2}{q^2} [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1)] g_{\mu\nu} [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2)]$$

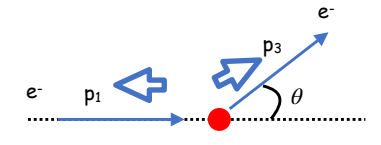
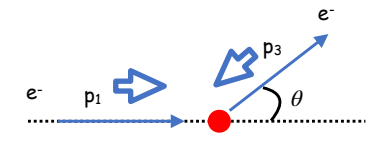
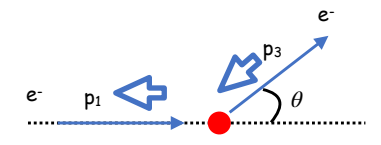
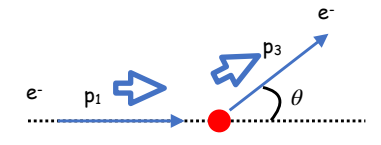
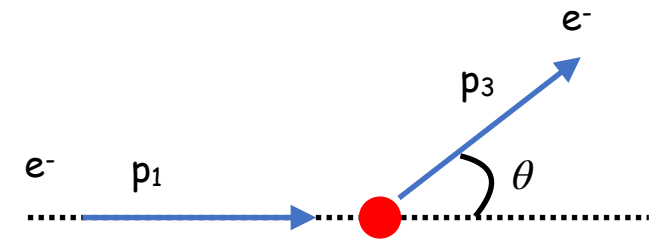
Calculemos todas las posibles corrientes de electrón

RR $\bar{u}_\uparrow(p_3) \gamma^\mu u_\uparrow(p_1) = (E + m_e)[(\alpha^2 + 1)c(\theta/2), 2\alpha s(\theta/2), -2i\alpha s(\theta/2), 2\alpha c(\theta/2)]$

LL $\bar{u}_\downarrow(p_3) \gamma^\mu u_\downarrow(p_1) = (E + m_e)[(\alpha^2 + 1)c(\theta/2), 2\alpha s(\theta/2), -2i\alpha s(\theta/2), 2\alpha c(\theta/2)]$

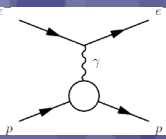
RL $\bar{u}_\uparrow(p_3) \gamma^\mu u_\downarrow(p_1) = (E + m_e)[(1 - \alpha^2)s(\theta/2), 0, 0, 0]$

LR $\bar{u}_\uparrow(p_3) \gamma^\mu u_\downarrow(p_1) = (E + m_e)[(\alpha^2 - 1)s(\theta/2), 0, 0, 0]$





Dispersión elástica electrón-protón



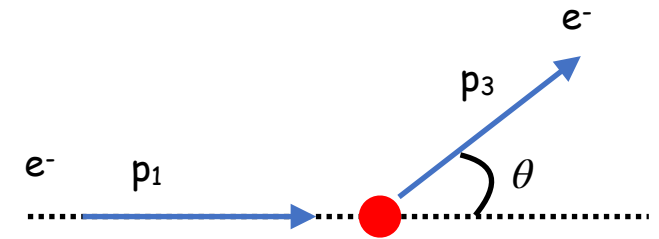
Dispersión de Rutherford

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{Q_q e^2}{q^2} [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1)] g_{\mu\nu} [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2)]$$

En el límite no relativista:

$$RR = LL \quad \bar{u}_\uparrow(p_3) \gamma^\mu u_\uparrow(p_1) = \bar{u}_\downarrow(p_3) \gamma^\mu u_\downarrow(p_1) = (2m_e)[c(\theta/2), 0, 0, 0]$$

$$RL = LR \quad \bar{u}_\uparrow(p_3) \gamma^\mu u_\downarrow(p_1) = \bar{u}_\downarrow(p_3) \gamma^\mu u_\uparrow(p_1) = (2m_e)[s(\theta/2), 0, 0, 0]$$

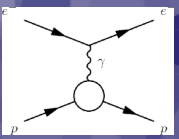


Los espinores del protón en estado inicial y final son (soluciones de la ecuación de Dirac para una partícula en reposo)

$$u_\uparrow(0) = \sqrt{2M_p} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_\downarrow(0) = \sqrt{2M_p} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \bar{u}_\uparrow(p_4) \gamma^\mu u_\uparrow(p_2) &= \bar{u}_\downarrow(p_4) \gamma^\mu u_\downarrow(p_2) = (2M_p)[1, 0, 0, 0] \\ \bar{u}_\uparrow(p_4) \gamma^\mu u_\downarrow(p_2) &= \bar{u}_\downarrow(p_4) \gamma^\mu u_\uparrow(p_2) = 0 \end{aligned}$$



Dispersión elástica electrón-protón



Dispersión de Rutherford

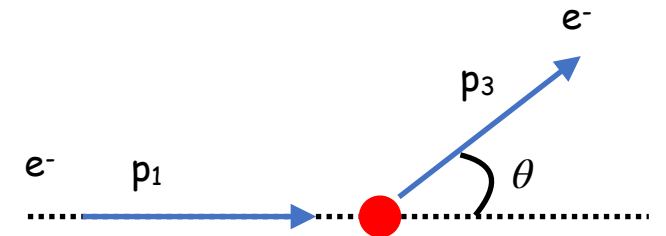
$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{Q_q e^2}{q^2} [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1)] g_{\mu\nu} [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2)]$$

$$\bar{u}_\uparrow(p_3) \gamma^\mu u_\uparrow(p_1) = \bar{u}_\downarrow(p_3) \gamma^\mu u_\downarrow(p_1) = (2m_e)[c(\theta/2), 0, 0, 0]$$

$$\bar{u}_\uparrow(p_4) \gamma^\mu u_\uparrow(p_2) = \bar{u}_\downarrow(p_4) \gamma^\mu u_\downarrow(p_2) = (2M_p)[1, 0, 0, 0]$$

$$\bar{u}_\uparrow(p_3) \gamma^\mu u_\downarrow(p_1) = \bar{u}_\downarrow(p_3) \gamma^\mu u_\uparrow(p_1) = (2m_e)[s(\theta/2), 0, 0, 0]$$

$$\bar{u}_\uparrow(p_4) \gamma^\mu u_\downarrow(p_2) = \bar{u}_\downarrow(p_4) \gamma^\mu u_\uparrow(p_2) = 0$$



Podemos calcular el elemento de matriz promediado en espín sumando sobre los 8 estados permitidos de helicidad:

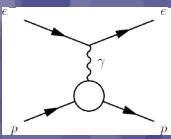
$$\langle |\mathcal{M}_{fi}^2| \rangle = \frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}_{fi}^2| = \frac{1}{4} \frac{e^4}{q^4} 4M_p^2 4m_e^2 (4c^2(\theta/2) + 4s^2(\theta/2))$$

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}^2| \rangle = \frac{16M_p^2 m_e^2 e^4}{q^4} = \boxed{\frac{M_p^2 m_e^2 e^4}{|\vec{p}|^4 \sin^4(\theta/2)}}$$

$$E_1 = E_3 = E$$

$$p_1 = p_3 = p$$

$$q^2 = (p_1 - p_3)^2 = (0, \vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 = -4|\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2)$$



Dispersión de Rutherford

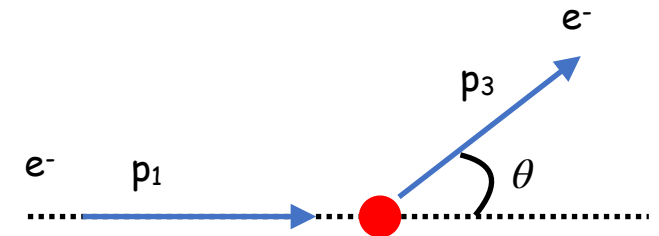
$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{Q_q e^2}{q^2} [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1)] g_{\mu\nu} [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2)]$$

$$\bar{u}_\uparrow(p_3) \gamma^\mu u_\uparrow(p_1) = \bar{u}_\downarrow(p_3) \gamma^\mu u_\downarrow(p_1) = (2m_e)[c(\theta/2), 0, 0, 0]$$

$$\bar{u}_\uparrow(p_4) \gamma^\mu u_\uparrow(p_2) = \bar{u}_\downarrow(p_4) \gamma^\mu u_\downarrow(p_2) = (2M_p)[1, 0, 0, 0]$$

$$\bar{u}_\uparrow(p_3) \gamma^\mu u_\downarrow(p_1) = \bar{u}_\downarrow(p_3) \gamma^\mu u_\uparrow(p_1) = (2m_e)[s(\theta/2), 0, 0, 0]$$

$$\bar{u}_\uparrow(p_4) \gamma^\mu u_\downarrow(p_2) = \bar{u}_\downarrow(p_4) \gamma^\mu u_\uparrow(p_2) = 0$$



Podemos calcular el elemento de matriz promediado en espín sumando sobre los 8 estados permitidos de helicidad:

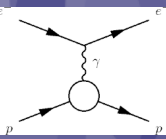
$$\langle |\mathcal{M}_{fi}^2| \rangle = \frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}_{fi}^2| = \frac{1}{4} \frac{e^4}{q^4} 4M_p^2 4m_e^2 (4c^2(\theta/2) + 4s^2(\theta/2))$$

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}^2| \rangle = \frac{16M_p^2 m_e^2 e^4}{q^4} = \boxed{\frac{M_p^2 m_e^2 e^4}{|\vec{p}|^4 \sin^4(\theta/2)}}$$

$$E_1 = E_3 = E$$

$$p_1 = p_3 = p$$

$$q^2 = (p_1 - p_3)^2 = (0, \vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 = -4|\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2)$$

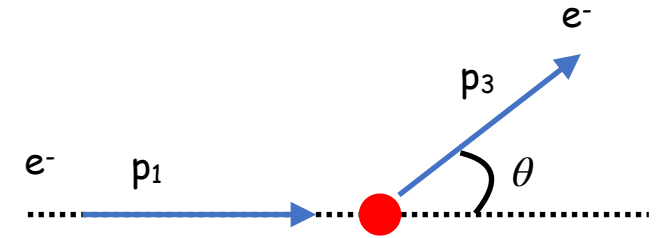


Dispersión de Rutherford

La sección eficaz diferencial en el sistema de referencia del laboratorio:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{1}{m_p + E_1 - E_1 \cos \theta} \right)^2 \langle |\mathcal{M}_{fi}^2| \rangle$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 m_p^2} \langle |\mathcal{M}_{fi}^2| \rangle = \frac{m_e^2 e^4}{64\pi^2 p^4 \sin^4(\theta/2)}$$



$$E_1 \sim m_e \ll m_p$$

$$E_K = p^2/2m_e$$

$$e^2 = 4\pi\alpha$$

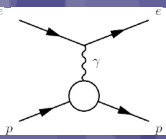
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Rutherford} = \frac{\alpha^2}{16E_K^2 \sin^4(\theta/2)}$$

En el límite no relativista, sólo la interacción entre las cargas eléctricas del electrón y protón contribuyen al proceso de dispersión.

No hay contribución significativa de la interacción magnética espín-espín



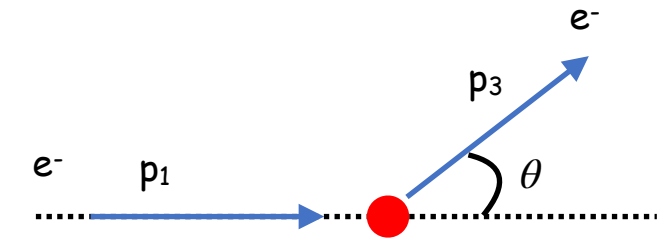
Dispersión elástica electrón-protón



Dispersión de Mott

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{Q_q e^2}{q^2} [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1)] g_{\mu\nu} [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2)]$$

Es el límite cuando el electrón es relativista pero el retroceso del protón puede ser despreciado



Teníamos las corrientes del electrón:

RR $\bar{u}_\uparrow(p_3) \gamma^\mu u_\uparrow(p_1) = (E + m_e)[(\alpha^2 + 1)c(\theta/2), 2\alpha s(\theta/2), -2i\alpha s(\theta/2), 2\alpha c(\theta/2)]$

LL $\bar{u}_\downarrow(p_3) \gamma^\mu u_\downarrow(p_1) = (E + m_e)[(\alpha^2 + 1)c(\theta/2), 2\alpha s(\theta/2), -2i\alpha s(\theta/2), 2\alpha c(\theta/2)]$

RL $\bar{u}_\uparrow(p_3) \gamma^\mu u_\downarrow(p_1) = (E + m_e)[(1 - \alpha^2)s(\theta/2), 0, 0, 0] = 0$

LR $\bar{u}_\downarrow(p_3) \gamma^\mu u_\uparrow(p_1) = (E + m_e)[(\alpha^2 - 1)s(\theta/2), 0, 0, 0] = 0$

En este caso:

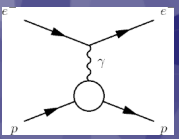
$$m_e \ll E \ll m_p$$

$$\alpha \sim 1$$

Dos de las posibles corrientes del electrón son cero ->

la helicidad del electrón se conserva

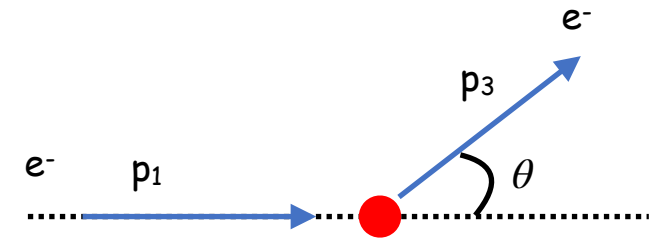
$$\bar{u}_\uparrow(p_3) \gamma^\mu u_\uparrow(p_1) = 2E[c(\theta/2), s(\theta/2), -is(\theta/2), c(\theta/2)]$$



Dispersión de Mott

La sección eficaz diferencial en el sistema de referencia del laboratorio:

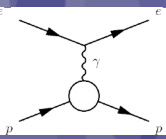
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{1}{m_p + E_1 - E_1 \cos \theta} \right)^2 \langle |\mathcal{M}_{fi}^2| \rangle$$



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \cos^2(\theta/2)$$

Podríamos haber obtenido esta expresión de la dispersión de electrones en un potencial estático desde un punto fijo en el espacio $V(\mathbf{r})$
No hay contribución significativa de la interacción magnética espín-espín

Hasta aquí no hemos tenido en cuenta la distribución de carga del protón.

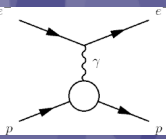


Factores de forma

- Las dispersiones de Rutherford y Mott pueden ser calculadas utilizando la teoría de perturbaciones a primer orden para la dispersión de un objeto puntual en un potencial de Coloumb.
- Para tener en cuenta la extensión finita de la distribución de carga del protón vamos a introducir un **factor de forma**.
- Cualitativamente, el factor de forma tiene en cuenta las diferentes contribuciones a la función de onda dispersada provenientes de diferentes puntos de la distribución de carga.

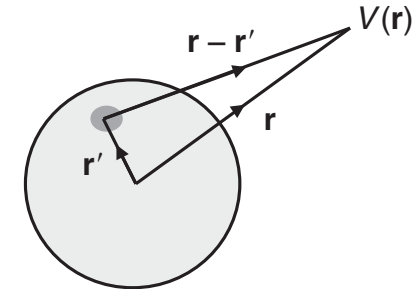
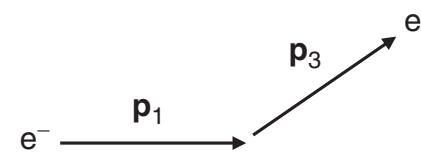


Dispersión elástica electrón-protón



Factores de forma

- Consideremos la dispersión de un electrón en el potencial estático de una distribución de carga extendida.



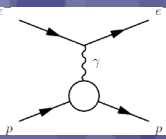
- El potencial a distancia \vec{r} del origen es:

$$V(\vec{r}) = \int \frac{Q\rho(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

$Q\rho(\vec{r}')$ Densidad de carga en términos de la carga total Q y la distribución de carga normalizada a la unidad.

- Las funciones de onda del estado inicial y del electrón dispersado son

$$\psi_i = e^{i(\vec{p}_1 \cdot \vec{r} - Et)} \quad \gamma \quad \psi_f = e^{i(\vec{p}_3 \cdot \vec{r} - Et)}$$



Factores de forma

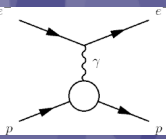
- El elemento de matriz a orden más bajo para la dispersión es:

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle \psi_f | V(\vec{r}) | \psi_i \rangle = \int e^{-i\vec{p}_3 \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) e^{i\vec{p}_1 \cdot \vec{r}} d^3\vec{r}$$

- Usando que $\vec{q} = (\vec{p}_1 - \vec{p}_3)$ y la expresión para el potencial:

$$\mathcal{M}_{fi} = \iint e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \frac{Q\rho(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' d^3\vec{r} = \iint e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}'} \frac{Q\rho(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' d^3\vec{r}$$

\vec{R}



Factores de forma

$$\mathcal{M}_{fi} = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}} \frac{Q}{4\pi|\vec{R}|} d^3\vec{R} \int \rho(\vec{r}') e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} d^3r'$$

Dispersión debido a
un potencial de
partícula puntual

Factor de forma

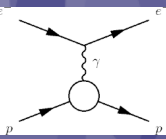
$$\mathcal{M}_{fi} = (M_{fi})_{puntual} F(\vec{q}^2)$$

$$F(\vec{q}^2) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r}$$

El tamaño finito del centro de dispersión introduce una diferencia de fase entre las ondas planas "dispersión de diferentes puntos en el espacio".



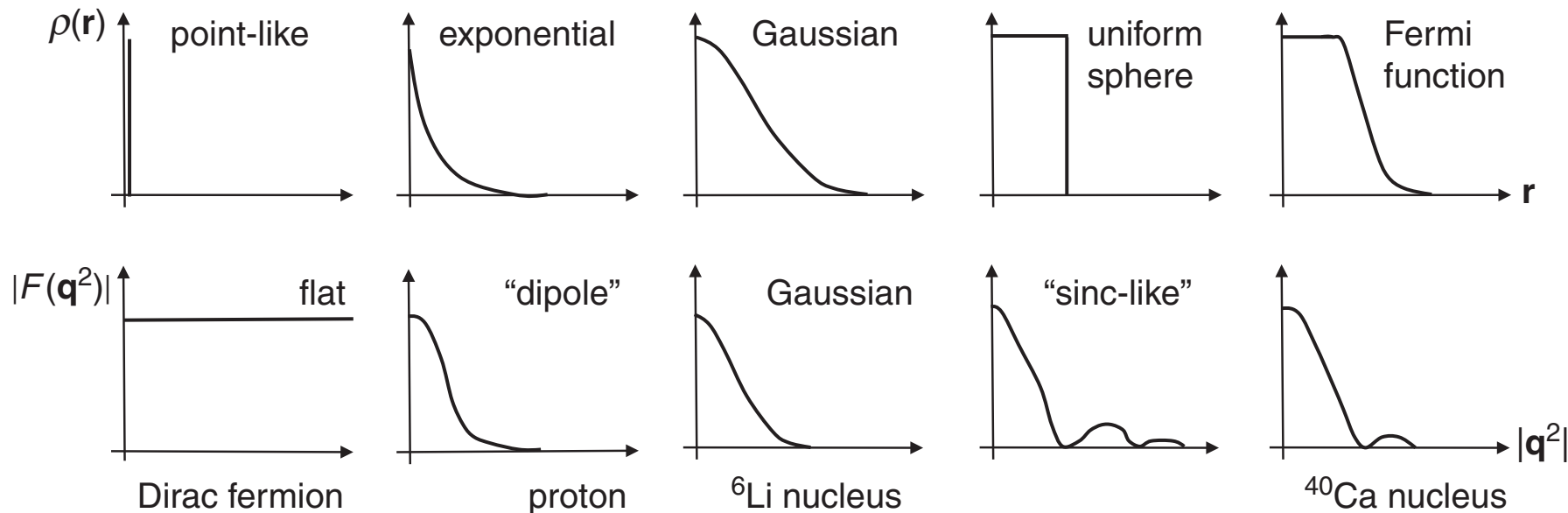
Dispersión elástica electrón-protón



Factores de forma

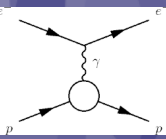
La sección eficaz de Mott queda:

$$\left(\frac{\sigma}{\Omega}\right)_{Mott} \rightarrow \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \theta/2} \cos^2 \frac{\theta}{2} |F(\vec{q}^2)|^2$$



El factor de forma es la transformada de Fourier tridimensional de la distribución de carga.

Si $\lambda_{foton} \gg$ tamaño de la distribución de $Q \rightarrow F(0) = 1$ (objeto puntual)



Dispersión electrón-protón relativista

- Consideremos el caso de dispersión a mayores energías donde el retroceso del protón no puede ser despreciado y la interacción magnética espín-espín es importante.

- Escribamos los momentos:

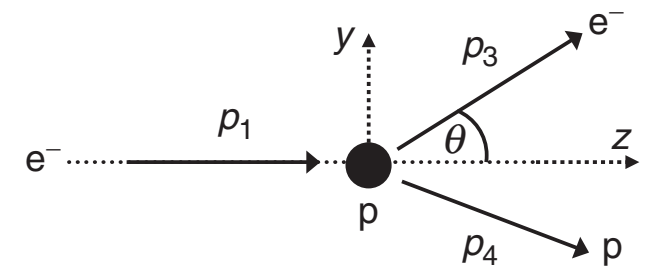
- Considerando: $m_e^2 \sim 0$

$$p_1 = (E_1, 0, 0, E_1)$$

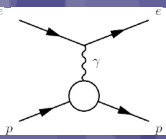
$$p_2 = (m_p, 0, 0, 0)$$

$$p_3 = (E_3, 0, E_3 \sin \theta, E_3 \cos \theta)$$

$$p_4 = (E_4, \vec{p}_4)$$

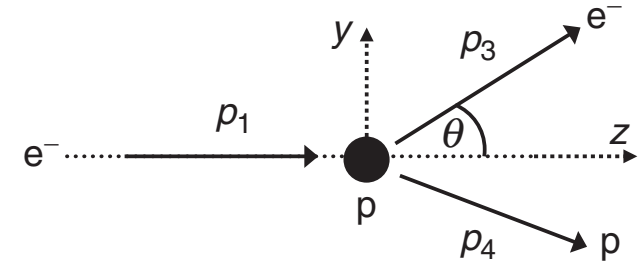


$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{8e^4}{(p_1 - p_3)^4} \left[(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - m_p^2(p_1 \cdot p_3) \right]$$



Dispersión electrón-protón relativista

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{8e^4}{(p_1 - p_3)^4} [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - m_p^2(p_1 \cdot p_3)]$$



- Un poco de cinemática ...

- ▶ En la mayoría de experimentos de dispersión elástica e-protón, el estado final de protón no se observa -> expresaremos los términos en función de los observables experimentales -> **energía y ángulo de dispersión del electrón.**

$$p_4 = p_1 + p_2 - p_3$$

$$p_1 \cdot p_1 = p_3 \cdot p_3 = m_e \rightarrow 0$$

$$p_1 \cdot p_2 = E_1 m_p$$

$$p_2 \cdot p_3 = E_3 m_p$$

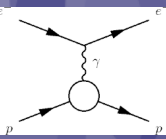
$$p_1 \cdot p_3 = E_1 E_3 (1 - \cos \theta)$$

$$p_1 \cdot p_4 = E_1 m_p - E_1 E_3 (1 - \cos \theta)$$

$$p_3 \cdot p_4 = E_1 E_3 (1 - \cos \theta) + E_3 m_p$$

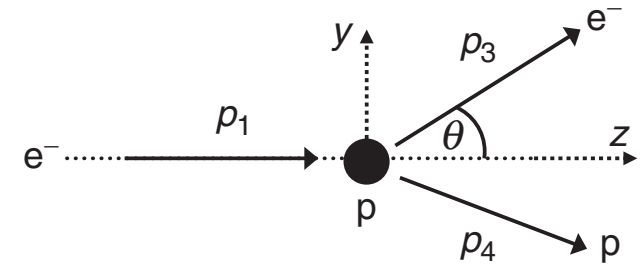
$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{8e^4}{(p_1 - p_3)^4} 2m_p E_1 E_3 \left[(E_1 - E_3) \sin^2 \frac{\theta}{2} + m_p \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$q^2 = (p_1 - p_3)^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 \cdot p_3 \approx -2E_1 E_3 (1 - \cos \theta)$$



Dispersión electrón-protón relativista

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{8e^4}{(p_1 - p_3)^4} 2m_p E_1 E_3 \left[(E_1 - E_3) \sin^2 \frac{\theta}{2} + m_p \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$



$$q^2 = (p_1 - p_3)^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 \cdot p_3 \approx -2E_1 E_3 (1 - \cos \theta) = -4E_1 E_3 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

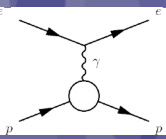
$$Q^2 \equiv -q^2 = 4E_1 E_3 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Podemos escribir a la energía perdida por el electrón en términos de Q^2 :

$$E_1 - E_3 = \frac{Q^2}{2m_p} \quad \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{m_p^2 e^4}{E_1 E_3 \sin^4(\theta/2)} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m_p^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Sección eficaz:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{E_3}{E_1} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m_p^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

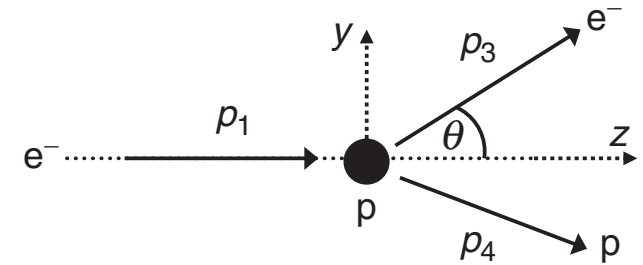


Dispersión electrón-protón relativista

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4(\theta/2)} \left[\frac{E_3}{E_1} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m_p^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Este término aparece por considerar el retroceso del protón

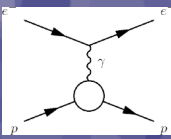
Este término aparece debido a la interacción espín-espín



Aunque la sección eficaz depende de Q^2 , E_3 , y θ \rightarrow sólo hay una variable independiente: Q^2 y E_3 se pueden expresar en función del ángulo de dispersión.

$$\frac{E_1}{E_3} = \frac{m_p}{m_p + E_1(1 - \cos \theta)}$$

$$q^2 = - \frac{2m_p E_1^2 (1 - \cos \theta)}{m_p E_1 (1 - \cos \theta)}$$



Tamaño finito del protón

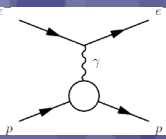
En general el tamaño finito del protón se puede modelar introduciendo dos funciones de estructura

- Una tiene en cuenta la distribución de carga del protón $G_E(q^2)$
- La otra relacionada a la distribución de momento magnético del protón $G_M(q^2)$

La sección eficaz diferencial para este caso es (fórmula de Rosenbluth)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{E_3}{E_1} \left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{(1 + \tau)} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad \tau = \frac{Q^2}{4m_p^2}$$

Los factores de forma $G_E(q^2)$ y $G_M(q^2)$ son funciones del cuadrado del cuadri-momento q^2 del fotón virtual (a diferencia de antes que dependían de \vec{q}^2) -> no pueden interpretarse como la transformada de Fourier de las distribuciones de carga y de momento magnético.



Tamaño finito del protón

Sin embargo:

$$q^2 = (E_1 - E_3)^2 - \vec{q}^2 \qquad -\vec{q}^2 = q^2 \left[1 - \left(\frac{q}{2m_p} \right)^2 \right]$$

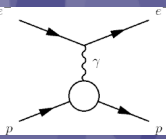
Si $\frac{q^2}{4m_p^2} \ll 1$ entonces $q^2 \approx -\vec{q}^2 \rightarrow G_E(q^2) \approx G(\vec{q}^2)$

→ En el límite $\frac{q^2}{4m_p^2} \ll 1$ podemos interpretar las funciones de estructura in términos de la transformadas de Fourier

$$G_E(q^2) \approx G_E(\vec{q}^2) = \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

$$G_M(q^2) \approx G_M(\vec{q}^2) = \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \vec{\mu}(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

$$\vec{\mu} = \frac{e}{m_p} \vec{S}$$



Tamaño finito del protón

$$G_E(q^2) \approx G_E(\vec{q}^2) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

$$G_M(q^2) \approx G_M(\vec{q}^2) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \mu(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

El momento magnético de una partícula de Dirac puntual está relacionada con su espín:

$$\vec{\mu} = \frac{e}{m} \vec{S}$$

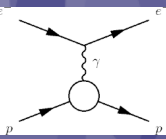
El valor medido experimentalmente para el momento anómalo magnético del protón es:

$$\vec{\mu} = 2.79 \frac{e}{m_p} \vec{S}$$

Por lo tanto al normalizar:

$$G_E(0) = \int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = 1$$

$$G_M(0) = \int \mu(\vec{r}) d^3\vec{r} = +2.79$$



¿Cómo medimos las funciones de estructura?

La sección eficaz diferencial del proceso elástico e-p → e-p depende de ambas distribuciones.

Podemos escribirla como:

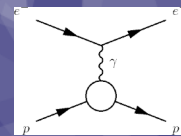
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{(1 + \tau)} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{E_3}{E_1}$$

A Q^2 bajo → $\tau \ll 1$, el factor de forma eléctrico es el que domina $\frac{d\sigma}{d\Omega} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \approx G_E^2$, and G_E^2 es equivalente al factor de forma $|F(\vec{q}^2)|$

A Q^2 alto → $\tau \gg 1$, el término magnético de espín-espín domina y $\frac{d\sigma}{d\Omega} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \approx (1 + 2\tau \tan^2 \frac{\theta}{2}) G_m^2$



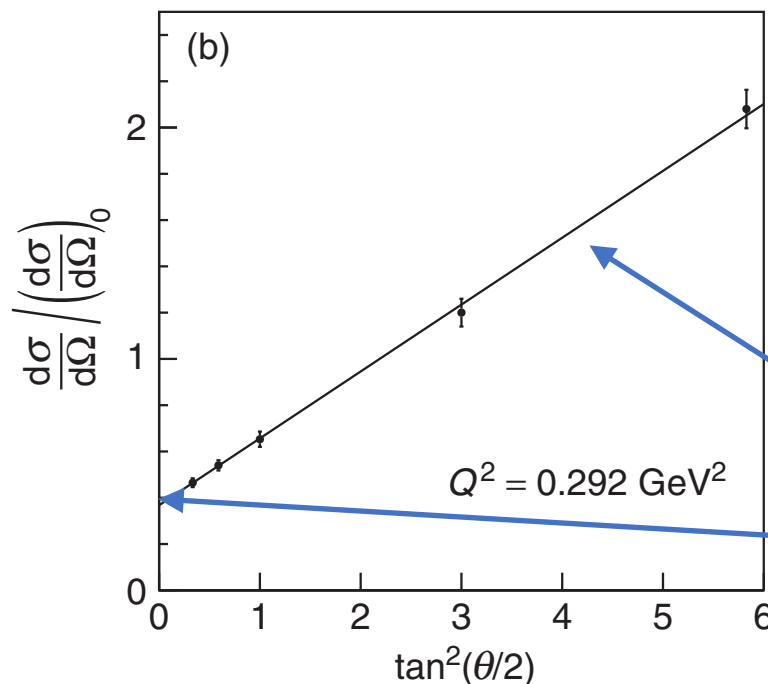
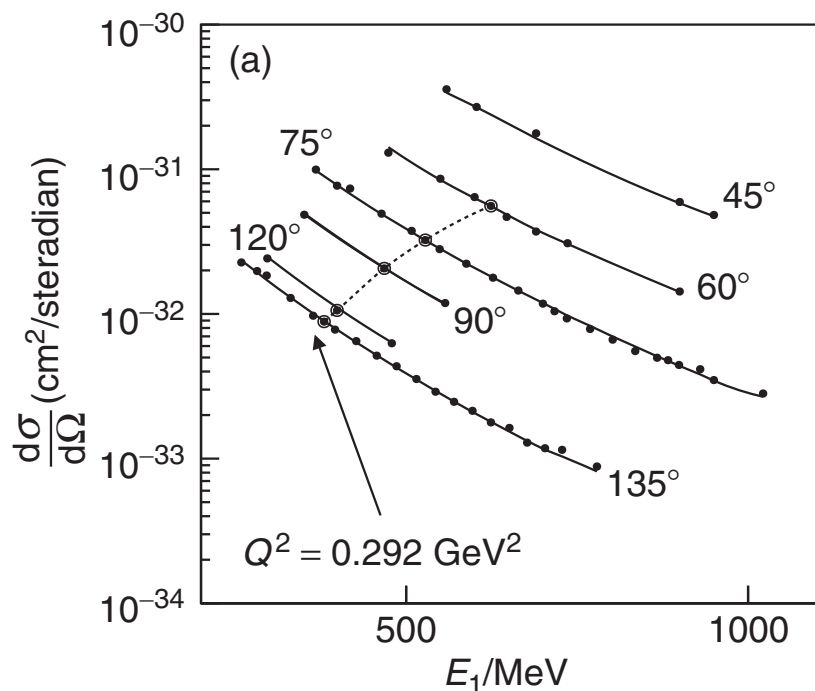
Dispersión elástica electrón-protón



¿Cómo medimos las funciones de estructura?

En general, podemos inferir la dependencia en Q^2 de las funciones de estructura de experimentos de dispersión elástica e-p variando la energía del haz de electrones.

Para cada energía del haz, se mide la sección eficaz diferencial para cada ángulo correspondiente al valor de Q^2 particular.



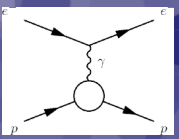
5 puntos con $Q^2 = 0.292 \text{ GeV}^2$ para diferentes energías del haz y diferentes ángulos de dispersión.

La dependencia lineal con la $\tan^2(\theta/2)$ es la esperada :

$$m = 2\tau[G_M(Q^2)]^2 \quad \gamma$$

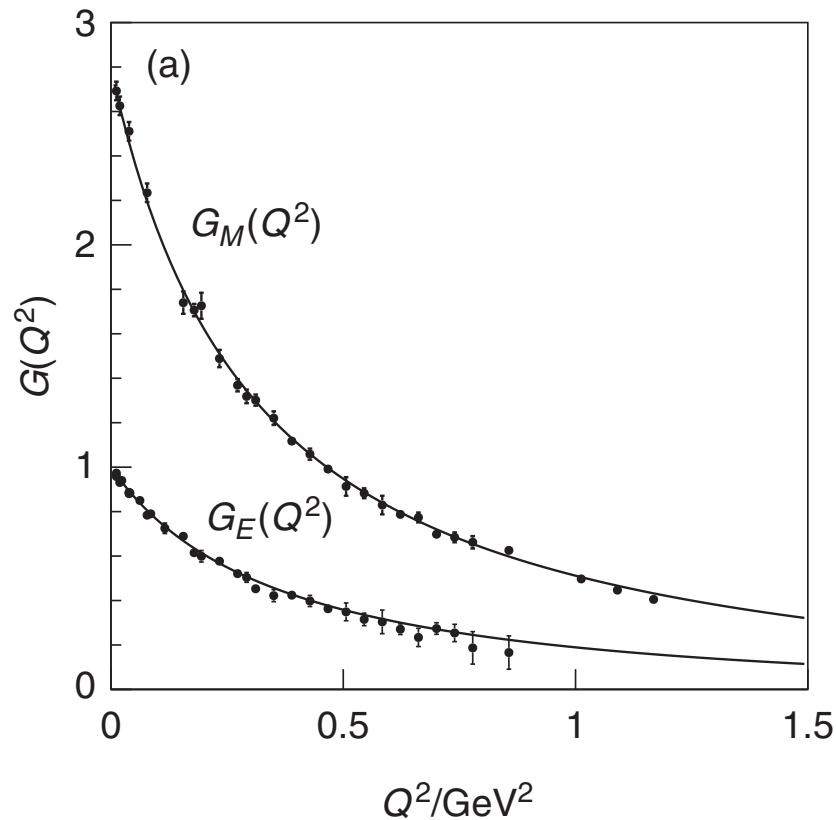
$$c = \frac{[G_E(Q^2)]^2 + \tau[G_M(Q^2)]^2}{(1 + \tau)}$$

Hughes et al., Phys. Rev. 139 (1965)B458



¿Cómo medimos las funciones de estructura?

También podemos hacer un análisis similar con las mediciones de la sección eficaz correspondiente a diferentes valores de Q^2 que nos da una determinación experimental de los factores de forma del protón a medida que Q^2 varía



El hecho que los factores de forma decrezcan con Q^2 demuestra que el protón tiene tamaño finito.

La forma de $G_M(Q^2)$ es muy parecida a la de $G_E(Q^2)$, lo que muestra que las distribuciones de Carga y momento magnético dentro del protón son consistentes.

Los valores medidos extrapolados a $Q^2 = 0$ están De acuerdo con $G_M(0) = 2.79$ y $G_E(0) = 1$

Hughes et al., Phys. Rev. 139 (1965)B458



Backup Slides