

Clase 25

Gabriela Navarro

Módulo de Teoría

Filial Física de Partículas

20 de abril 2021



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea





- Tanto en mecánica clásica como cuántica las leyes de conservación están asociadas con simetrías del Hamiltoniano.
- En el caso de la Física de partículas es natural considerar estas ideas en el contexto de la mecánica cuántica.
- Una simetría del Universo puede ser expresada requiriendo que todas las predicciones físicas sean invariantes ante la transformación de la función de onda:

$$\psi \rightarrow \psi' = \hat{U}\psi$$

\hat{U} operador de rotaciones finitas de los ejes coordenados

- La forma de \hat{U} está restringida por la condición de que todas las predicciones físicas se mantengan sin cambios ante la transformación de simetría.



- Una condición necesaria es que las normalizaciones de la función de onda permanezcan sin cambios:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \hat{U}\psi | \hat{U}\psi \rangle = \langle \psi | \hat{U}^\dagger \hat{U} | \psi \rangle \quad \hat{U}^\dagger \hat{U} = I$$

Operador debe ser unitario!

- También los autoestados de un sistema deben permanecer sin cambios bajo la transformación \rightarrow el hamiltoniano también posee esa simetría $\hat{H} \rightarrow \hat{H}' = \hat{H}$

- Para que todas las predicciones físicas permanezcan invariantes ante la transformación de simetría también se requiere que todos los elementos de matriz permanezcan invariantes:

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \langle \psi' | \hat{H} | \psi' \rangle = \langle \psi | \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} | \psi \rangle$$

$$\hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} = \hat{H}$$

$$\hat{U} \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} = \hat{U} \hat{H} \rightarrow \hat{H} \hat{U} = \hat{U} \hat{H}$$

$$[\hat{H}, \hat{U}] = 0$$

\hat{U} conmuta con el Hamiltoniano



Simetrías

- Consideremos una transformación infinitesimal

$$\hat{U}(\epsilon) = I + i\epsilon\hat{G}$$

\hat{G} es el generador de la transformación
 ϵ es un parámetro infinitesimal

- Entonces la unitariedad:

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = (1 + i\epsilon\hat{G})(1 - i\epsilon\hat{G}^\dagger) = 1 + i\epsilon(\hat{G} - \hat{G}^\dagger) + O(\epsilon^2) = 1 \Rightarrow \hat{G} = \hat{G}^\dagger$$

- Para cada simetría del Hamiltoniano hay una operación de simetría correspondiente con un generador \hat{G} hermítico asociado.
- Los autoestados del operador son reales y entonces el operador \hat{G} está asociado con una cantidad observada.
- Como \hat{U} conmuta con el hamiltoniano $\rightarrow [\hat{H}, \hat{G}] = 0$



- En mecánica cuántica la evolución en el tiempo del valor esperado del operador es:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{G} \rangle = i \langle [\hat{H}, \hat{G}] \rangle \rightarrow \frac{d}{dt} \langle \hat{G} \rangle = 0$$

- Por cada simetría del Hamiltoniano, hay una cantidad observable conservada G !

Simetría \longleftrightarrow ley de conservación

- Para cada simetría del Hamiltoniano hay una operación de simetría correspondiente con un generador \hat{G} hermítico asociado.
- Los autoestados del operador son reales y entonces el operador \hat{G} está asociado con una cantidad observada.



- Ejemplo: invariancia traslacional en una dimensión.
- El Hamiltoniano para un sistema de partículas depende de las velocidades y de la distancia relativa entre partículas \rightarrow no cambia frente una transformación que traslada todas las partículas en un distancia infinitesimal:

$$x \rightarrow x + \epsilon$$

- La transformación de la función de onda es:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x + \epsilon) \quad \text{expansión de Taylor} \rightarrow \psi(x) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \epsilon + O(\epsilon^2)$$

$$\psi' = \left(1 + i\epsilon \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) \quad \Rightarrow \quad \psi' = \left(1 + i\epsilon \hat{p}_x\right) \psi(x)$$
$$\hat{p}_x = -i \frac{\partial}{\partial x}$$

El generador de la transformación de simetría es el operador cuántico \hat{p}_x .
La invariancia traslacional del Hamiltoniano implica la conservación del momento.



- En general una operación de simetría puede depender de mas de un parámetro:

$$\hat{U} = 1 + i\vec{\epsilon} \cdot \vec{G}$$

- Ejemplo: caso de una traslación infinitesimal en el espacio 3-dimensional:

$$\hat{U} = 1 + i\vec{\epsilon} \cdot \hat{p} \equiv 1 + i\epsilon_x \hat{p}_x + i\epsilon_y \hat{p}_y + i\epsilon_z \hat{p}_z$$

- Transformaciones finitas

- Cualquier transformación finita puede ser expresada como una serie de transformaciones infinitesimales:

$$\hat{U}(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i\frac{1}{n}\vec{\alpha} \cdot \vec{G} \right)^n = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{G}}$$



$$\hat{U}(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i \frac{1}{n} \vec{\alpha} \cdot \vec{G}\right)^n = e^{i \vec{\alpha} \cdot \vec{G}}$$

- Traslación finita $x \rightarrow x + x_0$ en una dimensión:

$$\hat{U}(x_0) = e^{ix_0 \hat{p}_x} = e^{x_0 \frac{\partial}{\partial x}}$$

- La transformación de la función de onda:

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \hat{U} \psi(x) = e^{x_0 \frac{\partial}{\partial x}} \psi(x) \\ &= \left(1 + x_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x_0^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots\right) \psi(x) \\ &= \psi(x) + \frac{\partial \psi}{\partial x} x_0 + \frac{x_0^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dots \end{aligned}$$

Expansión de Taylor esperada para $\psi(x + x_0)$



Simetría de sabor 😊

- En los primeros estudios de física nuclear se comprobó que protones y neutrones tienen masa similar y que la fuerza nuclear es aproximadamente independiente de la carga → el potencial fuerte es :

$$V_{pp} \approx V_{nn} \approx V_{np}$$

- Para reflejar esta simetría observada de la fuerza nuclear se propuso que protón y neutrón podrían ser dos estados de un nucleón (análogo al espín up y down de una partícula de espín 1/2) :

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Se introduce la idea de Isospín I
- Protón y neutrón forman un doblete de Isospín
- Isospín total $I = 1/2, I_3 = \pm 1/2$



Simetría de sabor 😊

- La interacción de QCD trata a todos los sabores de quarks por igual la interacción fuerte posee una simetría de sabor similar a la nuclear.
- Para un sistema de quarks podemos escribir el Hamiltoniano como:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{fuerte} + \hat{H}_{em}$$

Si $m_u \approx m_d$ y $\hat{H}_{em} \ll \hat{H}_{fuerte}$ -> el hamiltoniano posee simetría de sabor up-down (ud)
-> nada cambiaría si todos los quarks up se reemplazaran por quarks down y viceversa.

- Consecuencia: la existencia de un estado de quarks ligado uud implica un estado ddu con la misma masa.



Simetría de sabor: un poco de matemática

- Estados up and down en un espacio abstracto de sabor: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Expresamos la invarianza de la interacción fuerte ante el cambio $u \leftrightarrow d$ como una invarianza ante rotaciones en el espacio abstracto de Isospín:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

- Una matriz general de 2x2 depende de 4 números complejos, puede ser descripta en términos de 8 números reales.
- La condición $\hat{U}\hat{U}^\dagger = I$ -> impone 4 restricciones -> $8 - 4 = 4$ matrices independientes



Simetría de sabor: un poco de matemática

- Una de las matrices es: $\hat{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{i\phi}$ no es una transformación de sabor!

- Las 3 matrices restantes unitarias forman un grupo $SU(2)$ con la propiedad $\det U = 1$.

$$\hat{U} = 1 + i\epsilon \hat{G} \quad \text{Generadores hermíticos}$$

- Las matrices que representan a \hat{G} del grupo $SU(2)$ son linealmente independientes con la identidad y sin traza.
- Una posible elección de estas 3 matrices generadoras de la simetría de sabor son las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La simetría de sabor propuesta para la interacción fuerte tiene las mismas propiedades de transformación que el espín.



Simetría de sabor: un poco de matemática

- El isospín se define en términos de las matrices de Pauli $\hat{T} = \frac{1}{2}\sigma$.
- La transformación finita en el espacio de sabor up-down se escribe en términos de la transformación unitaria: $\hat{U} = e^{i\alpha \cdot \hat{T}}$

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = e^{i\alpha \cdot \hat{T}} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \qquad \alpha \cdot \hat{T} = \alpha_1 \hat{T}_1 + \alpha_2 \hat{T}_2 + \alpha_3 \hat{T}_3$$

- Una transformación unitaria general es una rotación en el espacio de sabor.
- Esta transformación equivale a re-etiquetar el quark up como una combinación lineal del quark up y down.



Algebra de Isospín

- Generadores de $SU(2)$ definen un álgebra de Lie no abeliana.
- Los tres generadores del grupo, que corresponden a observables físicos, satisfacen:

$$[\hat{T}_1, \hat{T}_2] = i\hat{T}_3, \quad [\hat{T}_2, \hat{T}_3] = i\hat{T}_1, \quad [\hat{T}_3, \hat{T}_1] = i\hat{T}_2$$

- El operador total de isospín es : $\hat{T}^2 = \hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2 + \hat{T}_3^2$, es hermítico \rightarrow corresponde a un observable físico.
- Debido a que los tres operadores no conmutan entre sí, sus observables no pueden ser "observados" simultáneamente.
- Los estados de isospín se pueden etiquetar en términos del isospín total I y su tercera componente I_3 .
- Los autoestados de isospín son análogos a los autoestados del momento angular:

$$|l, m\rangle \rightarrow |I, I_3\rangle$$



Algebra de Isospín

- $\hat{T} |I, I_3\rangle = I(I+1) |I, I_3\rangle \qquad \hat{T}_3 |I, I_3\rangle = I_3 |I, I_3\rangle$

- En términos de isospín, los quarks up y down están representados por:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \qquad \text{y} \qquad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

- Los quarks up y down son los estados de un multiplete de espín 1/2 con tercera componente de isospín +1/2 y -1/2.

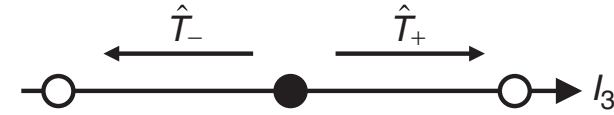




Algebra de Isospín: Operadores de isospín "escalera"

- Podemos definir los operadores escalera:

$$\hat{T}_- \equiv \hat{T}_1 - i\hat{T}_2 \quad \text{y} \quad \hat{T}_+ \equiv \hat{T}_1 + i\hat{T}_2$$



$$\hat{T}_+ |I, I_3\rangle = \sqrt{I(I+1) - I_3(I_3+1)} |I, I_3\rangle$$

$$\hat{T}_- |I, I_3\rangle = \sqrt{I(I+1) - I_3(I_3-1)} |I, I_3\rangle$$

- Los operadores escalera tienen el efecto de subir o bajar la tercera componente del isospín

$$\hat{T}_+ u = 0 \quad \hat{T}_+ d = u \quad \hat{T}_- u = d \quad \hat{T}_- d = 0$$

- Los operadores escalera convierten $u \rightarrow d$ y $d \rightarrow u$



Combinación de quarks

- Las reglas para combinar isospín para un sistema de dos quarks son idénticas a las de suma de adición del momento angular.
- I_3 suma como un escalar e I se suma como la magnitud de un vector.
- Para dos estados de isospín $|I^a, I_3^a\rangle$ y $|I^b, I_3^b\rangle$ que son combinadas, el resultado es:

$$I_3 = I_3^a + I_3^b \quad \text{y} \quad |I^a - I^b| \leq I \leq |I^a + I^b|$$

- Combinaciones de dos quarks: utilizamos las reglas para combinar isospín -> combinamos dos quarks livianos:

$$uu \equiv \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = |1, 1\rangle \quad dd \equiv \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |1, -1\rangle$$



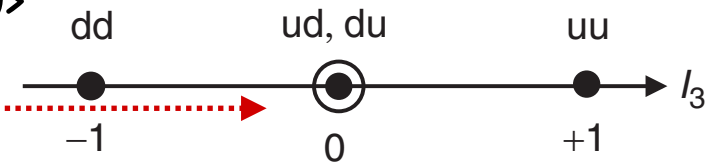
Combinación de quarks

- Las combinaciones ud y du con $I_3=0$ no son autoestados del isospín total.
- Para obtenerlas se utilizan los operadores escalera:

$$T_- |1, +1\rangle = \sqrt{2} |1, 0\rangle = T_-(uu) = ud + du \rightarrow |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du)$$

- El estado $|0, 0\rangle$ es una combinación lineal de ud y du ortogonal con $|1, 0\rangle$

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)$$



- Las 4 posibles combinaciones se descomponen en un triplete con $I=1$ y un singlete con $I=0$

$$uu \equiv \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = |1, 1\rangle \quad dd \equiv \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |1, -1\rangle \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du) \quad |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)$$

$$2 \otimes 2 =$$

3

\oplus

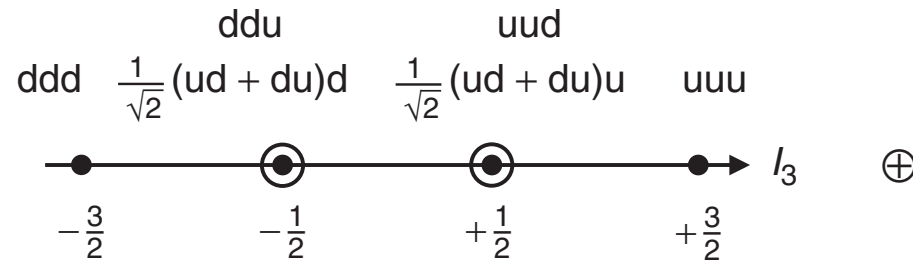
1



Formación de hadrones

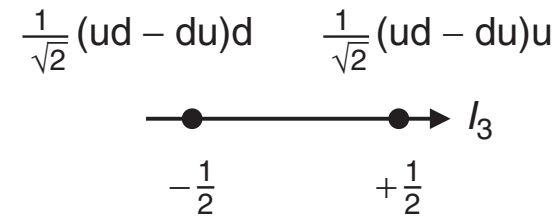
Combinación de quarks

- Para formar un barión agregamos un quark u o d más a estos estados singlete y triplete.
- I_3 se suma como escalar $\rightarrow -3/2, -1/2, +1/2, +3/2$



$I = 1/2 \rightarrow$ doblete

$I = 3/2 \rightarrow$ cuadruplete



$I = 1/2 \rightarrow$ doblete

Simétrico ante intercambio de cualquier par de quarks

$$\left| \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle = uuu$$

$$\left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu)$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(ddu + dud + udd)$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = ddd$$

$$\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2uud - udu - duu)$$

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2ddu - udd - dud)$$

Simetría mixta:
Simétrico ante $1 \leftrightarrow 2$

$$\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(udu - duu)$$

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(udd - dud)$$

Simetría mixta:
Anti-simétrico ante $1 \leftrightarrow 2$



Combinación de quarks: estados de espín

- Podemos aplicar exactamente la misma matemática para encontrar las posibles combinaciones de espín
- La combinación de 3 partículas de espín 1/2 se construye de la misma manera que para el caso de isospín y es:

$$\left| \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle = \uparrow \uparrow \uparrow$$

$$\left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (\uparrow \uparrow \downarrow + \uparrow \downarrow \uparrow + \downarrow \uparrow \uparrow)$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (\downarrow \downarrow \uparrow + \downarrow \uparrow \downarrow + \uparrow \downarrow \downarrow)$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = \downarrow \downarrow \downarrow$$

$$\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (2 \uparrow \uparrow \downarrow - \uparrow \downarrow \uparrow - \downarrow \uparrow \uparrow)$$

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (2 \downarrow \downarrow \uparrow - \uparrow \downarrow \downarrow - \downarrow \uparrow \downarrow)$$

$$\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow \downarrow \uparrow - \downarrow \uparrow \uparrow)$$

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow \downarrow \downarrow - \downarrow \uparrow \downarrow)$$



Estado fundamental de las funciones de onda de bariones

- Existen 8 posibles estados de isospín para un sistema de 3 quarks y 8 posibles estados de espín -> 64 combinaciones posibles combinadas de estado de sabor y de espín.
- Además de las componentes de sabor y espín de la función de onda hay que tener en cuenta las correspondientes al contenido de color y espacial.
- La función general de un estado ligado de qqq que tiene en cuenta todos los grados de libertad es:

$$\psi = \phi_{sabor} \chi_{espin} \xi_{color} \eta_{espacial}$$

- Como los quarks son Fermiones, se requiere que ψ sea antisimétrica frente al intercambio de cualesquiera de dos quarks -> pone restricciones sobre cada función de onda.

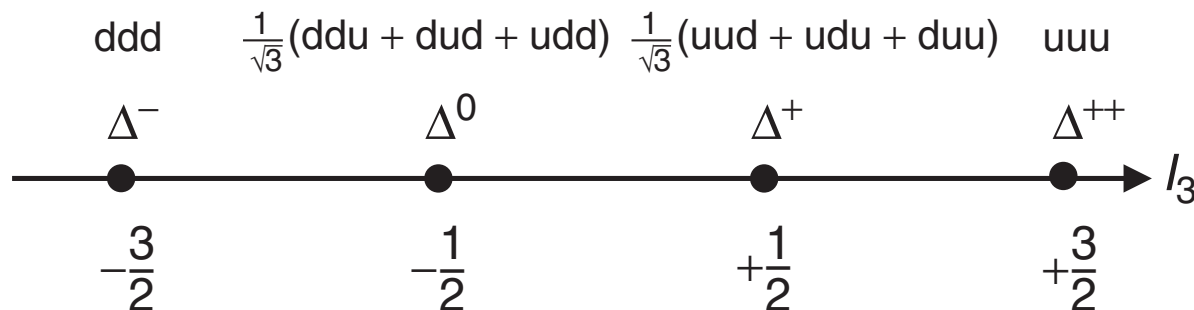


Formación de hadrones

Estado fundamental de las funciones de onda de bariones

$$\psi = \phi_{sabor} \chi_{espin} \xi_{color} \eta_{espacial}$$

- La función de onda de color es necesariamente totalmente antisimétrica.
- Consideraremos el estado fundamental \rightarrow no hay momento angular orbital interno $\rightarrow L=0 \rightarrow$ la función de onda espacial es simétrica \rightarrow la combinación de color-espacial es **antisimétrica**.
- Esto implica que la combinación $\phi_{sabor} \chi_{espin}$ debe ser **simétrica**!
- Una forma de armar un producto totalmente simétrico es combinar las funciones de onda simétricas de espín con las funciones de onda simétricas de isospín



Da lugar a 4 partículas de espín-3/2 e isospín-3/2.
Se las conoce como los bariones Δ



Estado fundamental de las funciones de onda de bariones

$$\psi = \phi_{sabor} \chi_{espin} \xi_{color} \eta_{espacial}$$

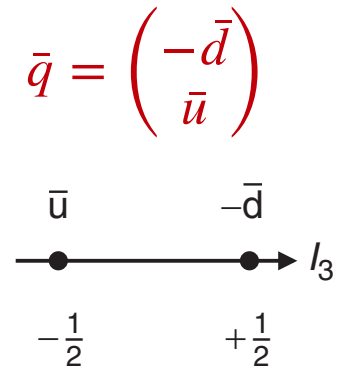
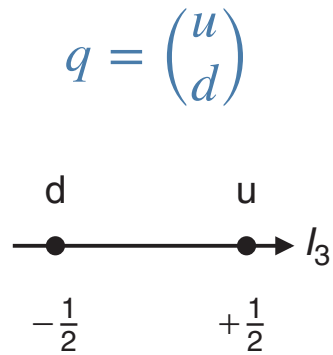
- La otra forma es combinar las funciones de onda de espín e isospín con simetría mixta de forma tal que ambas sean simétricas o asimétricas al intercambiar 1 \leftrightarrow 2.
- No resulta suficiente, ya que no tienen simetría definida al intercambiar 1 \leftrightarrow 3.
- Existe una combinación lineal:
$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_S \chi_S + \phi_A \chi_A)$$
 \rightarrow simétrico ante el intercambio de cualesquiera dos quarks.
- Los dos posibles estados de sabor son el protón y el neutrón

$$\begin{aligned}
 |p \uparrow\rangle = & \frac{1}{\sqrt{18}}(2u \uparrow u \uparrow d \downarrow - u \uparrow u \downarrow d \uparrow - u \downarrow u \uparrow d \uparrow \\
 & + 2u \uparrow d \downarrow u \uparrow - u \uparrow d \uparrow u \downarrow - u \downarrow d \uparrow u \uparrow \\
 & + 2d \downarrow u \uparrow u \uparrow - d \uparrow u \uparrow u \downarrow - d \uparrow u \downarrow u \uparrow).
 \end{aligned}$$



Representación de Isospín de los antiquarks

- Podemos aplicar una transformación de conjugación de carga al doblete de isospín $q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ y escribir el doblete de isospín de antiquarks:



El orden de \bar{u} y \bar{d} y su signo en el doblete aseguran que:

- quarks y antiquarks se comportan de la misma manera ante transformaciones de SU(2) de sabor y
- las predicciones físicas son invariantes ante transformaciones simultáneas de $u \leftrightarrow d$ y $\bar{u} \leftrightarrow \bar{d}$

- Efecto de los operadores escalera:

$$\hat{T}_+ \bar{u} = -\bar{d} \quad \hat{T}_+ \bar{d} = 0 \quad \hat{T}_- \bar{u} = 0 \quad \hat{T}_- \bar{d} = -\bar{u}$$



Formación de hadrones

Mesones

- Un mesón es un estado ligado de quark y antiquark. En términos de isospín, los 4 posibles estados se pueden expresar como combinación de los dobletes quark y antiquark de SU(2).

$$|1, +1\rangle = \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \overline{\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle} = -u\bar{d}$$

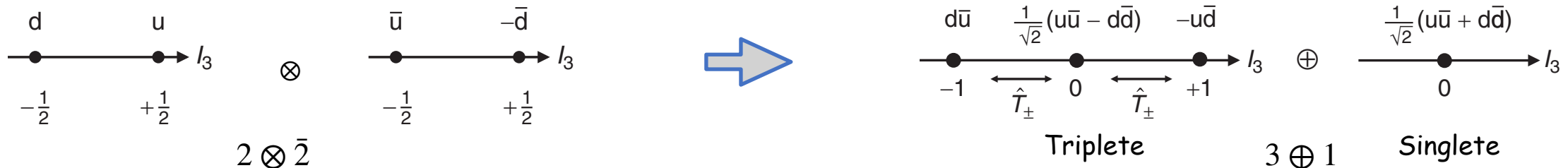
$$|1, -1\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \overline{\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle} = d\bar{u}$$

- Utilizando los operadores escalera podemos hallar el tercer estado del triplete:

$$\hat{T}_- |1, +1\rangle \rightarrow |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

- Y el singlete lo obtenemos por ortogonalidad:

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$$





SU(3) de sabor 😊

- Es posible extender la simetría de sabor para incluir el quark strange "s".
- La parte de interacción fuerte del Hamiltoniano $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{fuerte} + \hat{H}_{em}$ trata a todos los quarks de igual forma y por lo tanto posee simetría de sabor uds **exacta**.
- Sin embargo, como la masa del quark s es diferente a la masa de los quarks u y d, el Hamiltoniano total no es simétrico frente a transformaciones de sabor.
- Debido a que $m_s - m_{u/d} \approx 100 \text{ MeV}$ es relativamente pequeña comparada con la energía de ligadura de los bariones del orden de 1 GeV -> vamos a proceder como si el Hamiltoniano tuviera la simetría de sabor uds. (Tener en mente que la simetría es sólo aproximada).



SU(3) de sabor 😊

- La simetría de sabor uds se puede expresar en el espacio de sabor como:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \\ s' \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$$

- Las matrices de 3x3 se escriben en términos de 9 números complejos -> 18 números reales.
- 9 restricciones que vienen de $\hat{U}^\dagger \hat{U} \rightarrow 18 - 9 = 9 \rightarrow \hat{U}$ puede ser expresada en términos de 9 matrices de 3x3 linealmente independientes.
- Una de esas matrices es la identidad x fase compleja -> no relevante.
- Las 8 matrices restantes forman un grupo de SU(3).



SU(3) de sabor 😊

- Las matrices se pueden expresar en términos de 8 generadores independientes hermíticos \hat{T}_i .
- Los generadores se escriben en términos de 8 matrices $\lambda \rightarrow \hat{T} = \frac{1}{2}\lambda$
- Las matrices actúan sobre las representaciones de SU(3) de u, d y s.

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- El grupo SU(3) de simetría de sabor contiene al subgrupo de SU(2) u \leftrightarrow d de simetría de sabor \rightarrow 3 de las matrices λ corresponden a la simetría de isospín de SU(2):

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{-i} & 0 \\ \boxed{i} & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

 Matrices de Pauli



SU(3) de sabor 😊

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- La tercera componente del isospín es: $\hat{T}_3 = \frac{1}{2}\lambda_3 \rightarrow \hat{T}_3 u = +\frac{1}{2}u, \hat{T}_3 d = -\frac{1}{2}d, \hat{T}_3 s = 0$

- Los operadores de subida y bajada de isospín se definen como : $T_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2)$

- Las matrices λ restantes se obtienen teniendo en cuenta que la simetría SU(3) también contienen los subgrupos SU(2) u \leftrightarrow s y SU(2) d \leftrightarrow s, los cuales también se expresan en función de las matrices de Pauli.

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

u \leftrightarrow s

d \leftrightarrow s



SU(3) de sabor 😊

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- De estas 9 matrices sólo 8 son independientes -> alguna de las matrices diagonales λ_3 , λ_X , λ_Y puede ser escrita en función de las otras dos.
- Como la simetría $u \leftrightarrow d$ es exacta, nos quedamos con λ_3 y usamos una combinación lineal de λ_X , λ_Y :
- Las 8 matrices utilizadas para representar los generadores de la simetría SU(3): matrices de Gellman

$$\begin{array}{cccc} \lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$



SU(3) de sabor 😊: estados

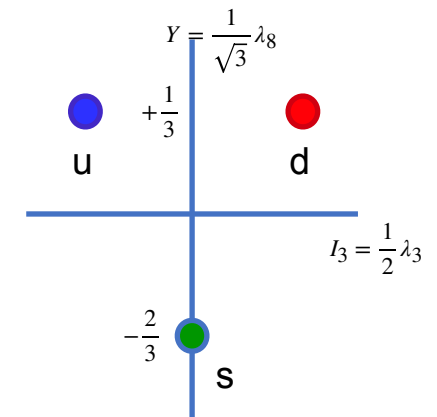
- De los 8 generadores de SU(3) sólo T_3 y T_8 conmutan y describen cantidades observables compatibles -> además del isospín total, los estados de SU(3) se describen en términos de los autoestados de las matrices λ_3 y λ_8 .
- Los números cuánticos correspondientes son la **tercera componente del isospín** y la **hipercarga de sabor** definidos por los operadores:

$$\hat{T}_3 = \frac{1}{2} \lambda_3$$

$$\hat{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8$$

- El contenido de sabor de un estado está identificado únicamente por:

$$I_3 = \frac{1}{3}(n_u - n_d) \quad \text{y} \quad Y = \frac{1}{3}(n_u + n_d - 2n_s)$$

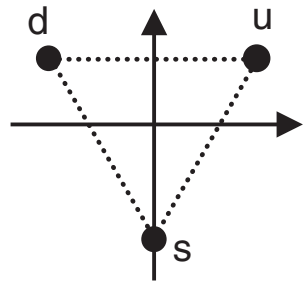




Simetrías

SU(3) de sabor 😊: estados

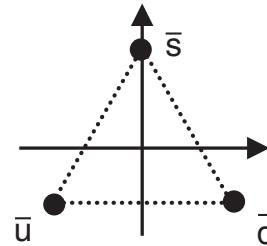
Los números cuánticos de I_3 y Y para antiquarks tienen el signo opuesto y forman un multiplete $\bar{3}$.



Quarks: 3

$$I_3 u = +\frac{1}{2}u; \quad I_3 d = -\frac{1}{2}d; \quad I_3 s = 0$$

$$Y u = +\frac{1}{3}u; \quad Y d = -\frac{1}{3}d; \quad Y s = -\frac{2}{3}s$$



Antiquarks: $\bar{3}$

$$I_3 \bar{u} = -\frac{1}{2}\bar{u}; \quad I_3 \bar{d} = +\frac{1}{2}\bar{d}; \quad I_3 \bar{s} = 0$$

$$Y \bar{u} = -\frac{1}{3}\bar{u}; \quad Y \bar{d} = -\frac{1}{3}\bar{d}; \quad Y \bar{s} = +\frac{2}{3}\bar{s}$$

• Las 6 matrices λ restantes se pueden usar para generar los operadores escalera:

$$\hat{T}_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2) \rightarrow d \leftrightarrow u$$

$$T_+ d = u; \quad T_- u = d$$

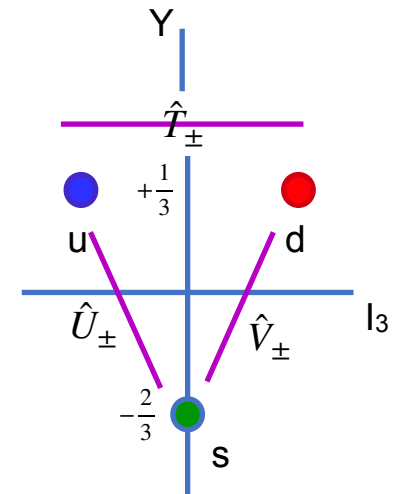
$$\hat{V}_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5) \rightarrow u \leftrightarrow s$$

$$V_+ s = u; \quad V_- u = s$$

$$\hat{U}_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7) \rightarrow d \leftrightarrow s$$

$$U_+ s = d; \quad U_- d = s$$

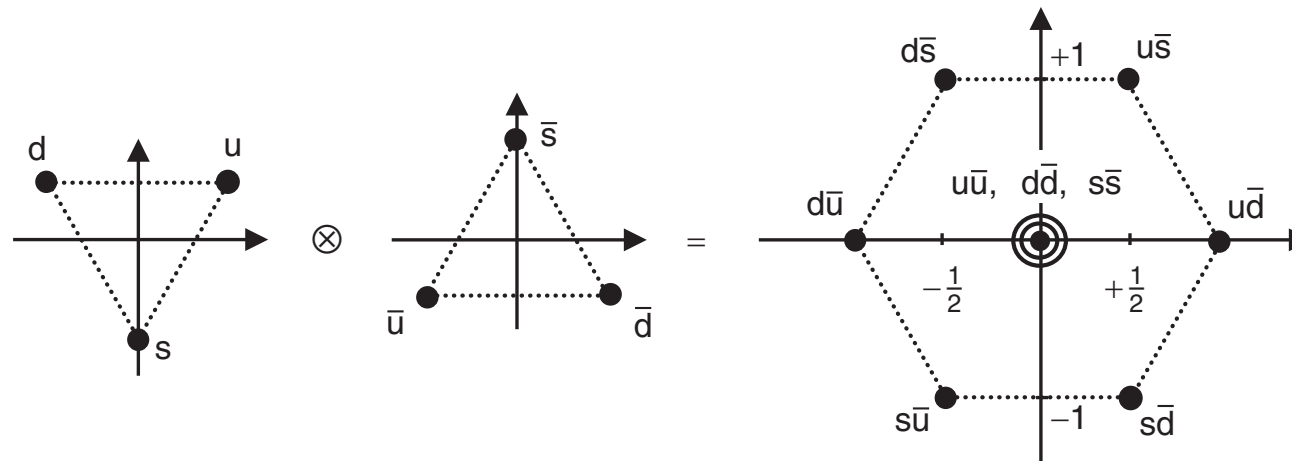
Todas las otras combinaciones dan 0





Mesones livianos (uds)

- Los estados livianos de mesones $q\bar{q}$ formados por todas las combinaciones posibles de quarks/ antiquarks u, d y s se pueden construir usando la propiedad aditiva de I_3 y Y para los estados de los extremos.
- Luego se usan los operadores escalera para obtener la estructura completa de multipletes.
- Las 9 combinaciones posibles son:



- Los 3 estados centrales con $I_3 = 0$ y $Y = 0$, serán combinaciones lineales de $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$.

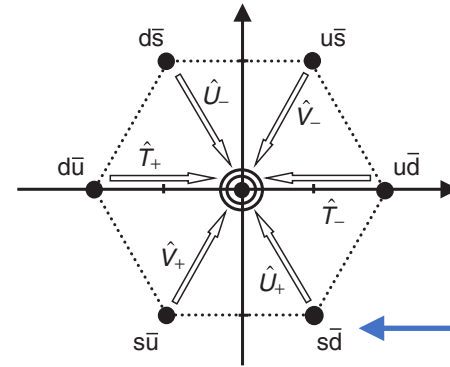


Mesones livianos (uds)

- Para obtener los estados centrales usamos los operadores escalera y la ortogonalidad. Desde cada extremo, hay 6 maneras de alcanzar el centro:

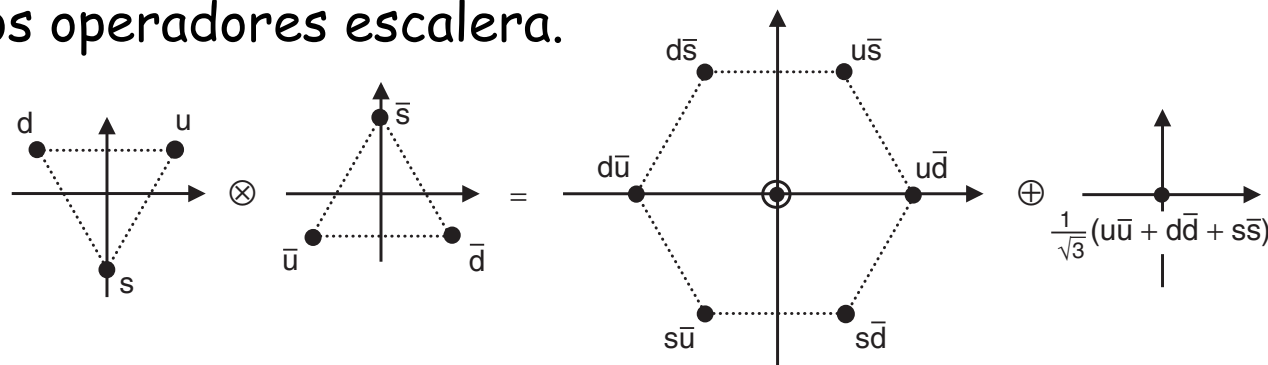
Ej.

$$T_+ |d\bar{u}\rangle = |u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle$$



$$U_+ |s\bar{d}\rangle = |d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle$$

- De los 6 posibles estados, sólo dos son independientes.
- Como son 3 estados con $I_3 = 0$ y $Y = 0 \rightarrow$ no todos son parte del mismo multiplete, hay uno que no se obtiene usando los operadores escalera.



Estructura de multipletes para la combinación de un q and anti- q en la simetría de sabor $SU(3)$.
Los están descompuestos en un octete y un singlete.



Mesones livianos (uds): L=0

- Consideremos los mesones con momento angular orbital $\ell = 0 \rightarrow$ el momento angular total \mathbf{J} está determinado por el estado de espín solamente \rightarrow dos posibles estados: $s = 0$ y $s = 1$.
- Los estados más livianos se dividen en $J = 0$ (pseudoscalares) y $J = 1$ (vectoriales).

Como la simetría de sabor es aproximada. Experimentalmente:

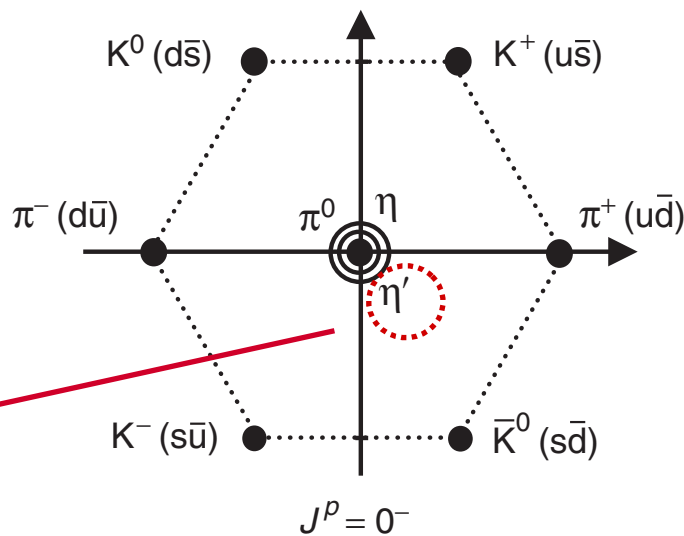
$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

$$\eta \approx \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$$

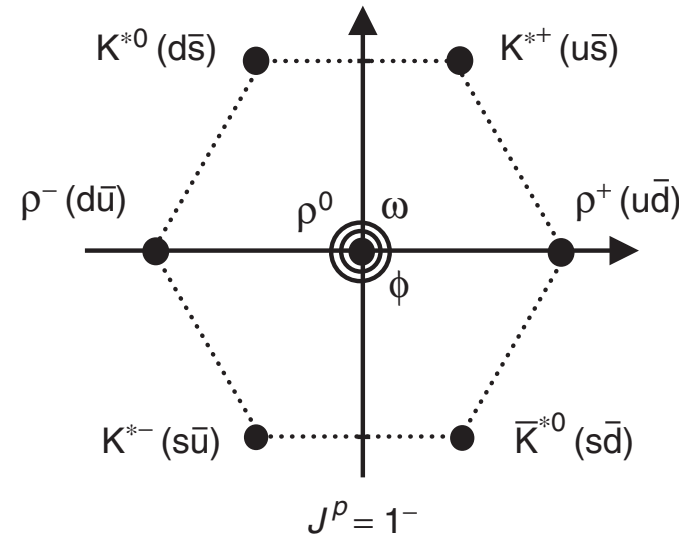
$$\eta' \approx \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

Singlete

Pseudoscalares



Vectoriales



$$\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

$$\omega \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$$

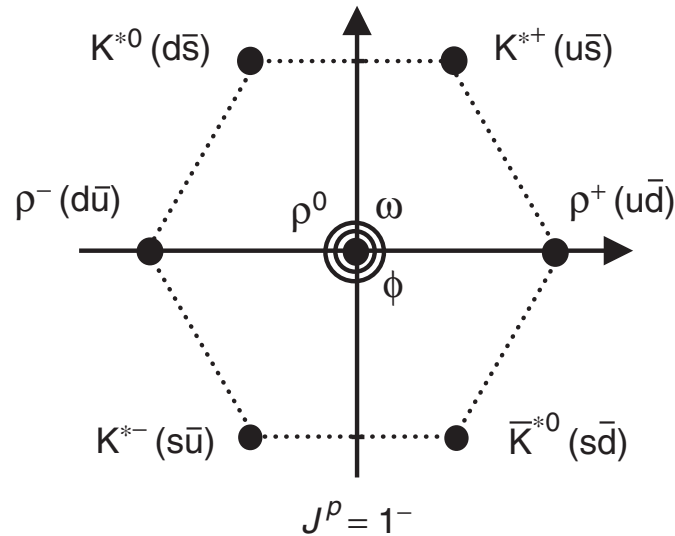
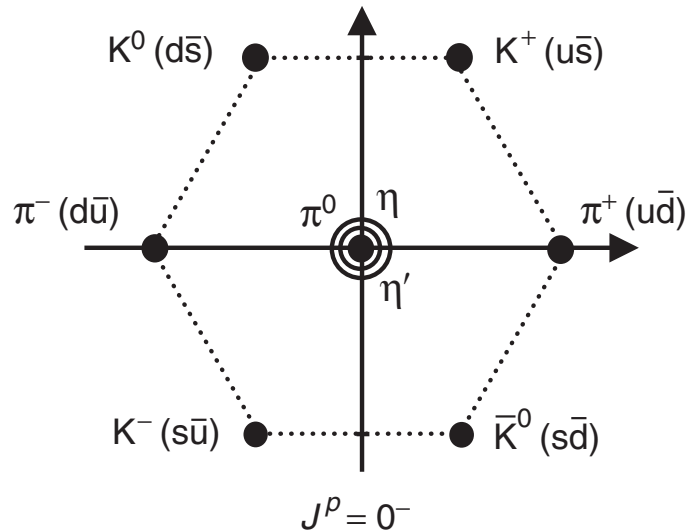
$$\phi \approx s\bar{s}$$

Las predicciones son menos útiles \rightarrow los estados físicos son mezclas de los estados de octete y singlete.



Mesones livianos (uds): $L=0$

Masas



Pseudoscalar mesons		Vector mesons	
π^0	135 MeV	ρ^0	775 MeV
π^\pm	140 MeV	ρ^\pm	775 MeV
K^\pm	494 MeV	$K^{*\pm}$	892 MeV
K^0, \bar{K}^0	498 MeV	K^{*0}/\bar{K}^{*0}	896 MeV
η	548 MeV	ω	783 MeV
η'	958 MeV	ϕ	1020 MeV

- Si la simetría $SU(3)$ de sabor fuera exacta todos los estados de mesones del octete pseudoescalar tendrían la misma masa.

- Las diferencias observadas pueden ser atribuidas al hecho que el quark s es más masivo que los up y down.

- Sin embargo esto no explica que los mesones vectoriales son más masivos que los pseudoescalares.

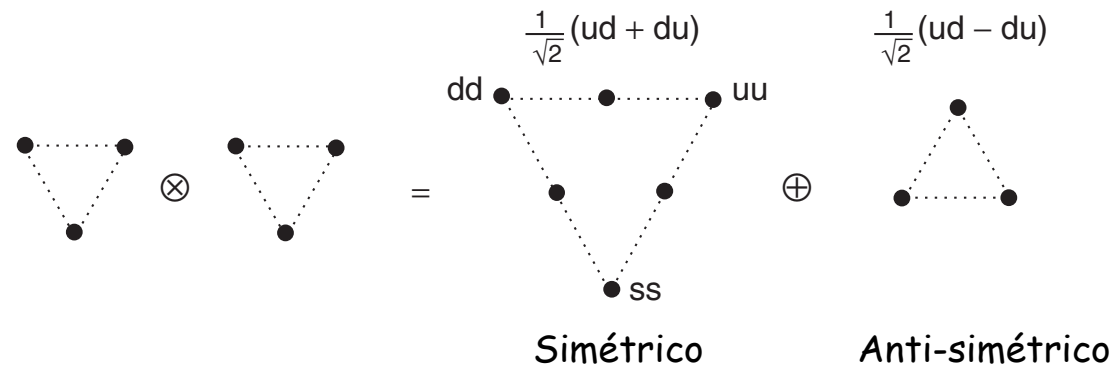
- La única diferencia entre los estados π y ρ es la función de onda de espín.

- Por lo tanto la diferencia de masas puede ser atribuida a una interacción espín-espín.



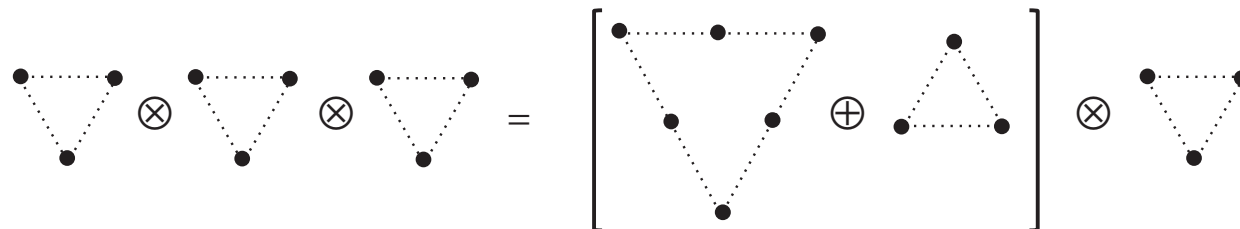
Bariones (uds)

- Construir estados bariónicos es bastante tedioso, debemos considerar la estructura de multipletes resultante de combinar dos quarks y añadir el tercero.
- Concentrémonos en la estructura de multipletes:



El triplete tiene los mismos estados de I_3 y Y que la representación de $SU(3)$ de un antiquark $\rightarrow 3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$

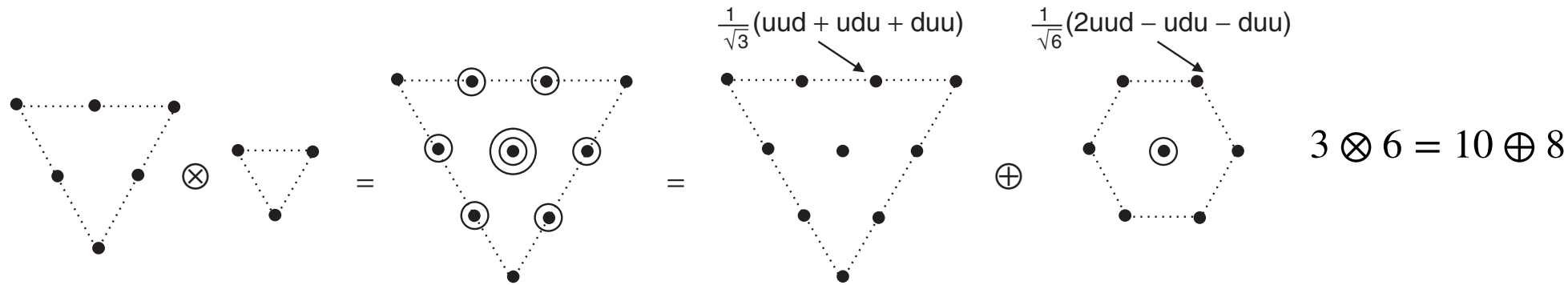
- La estructura de multipletes para las 27 posibles combinaciones de sabor de un sistema qqq se obtiene añadiendo un triplete de quarks a cada sextete y triplete anteriores.



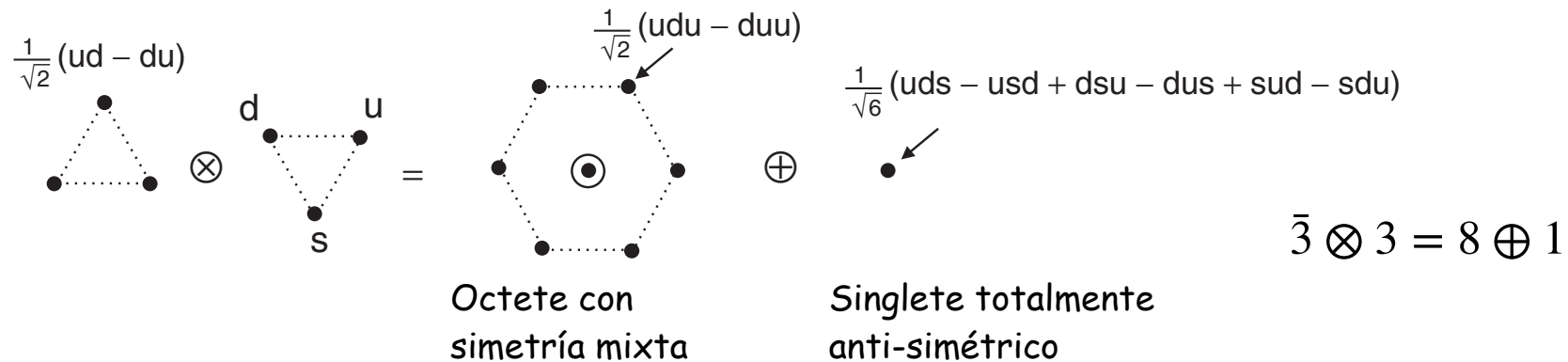


Bariones (uds)

- Comenzamos por el sextete:



- Triplete: como el caso de mesones uds combinamos $\bar{3} \otimes 3$ y obtenemos un octete y un singlete.



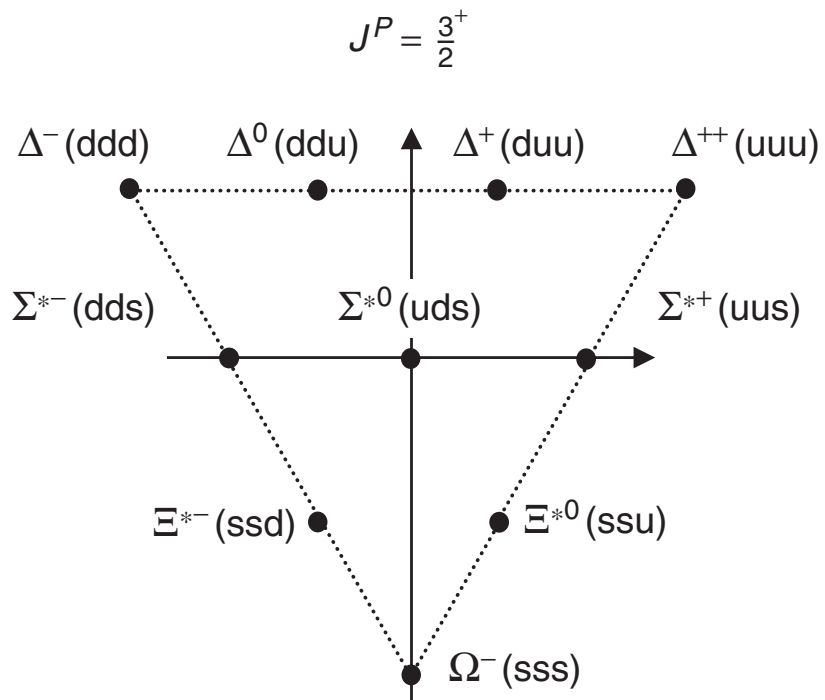
En resumen la combinación de 3 quarks uds se descompone en:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$



Bariones observados del decuplete con $L=0$

- Los estados bariónicos del decuplete tienen spin $3/2$, y funciones de onda de espín y de sabor simétricas.



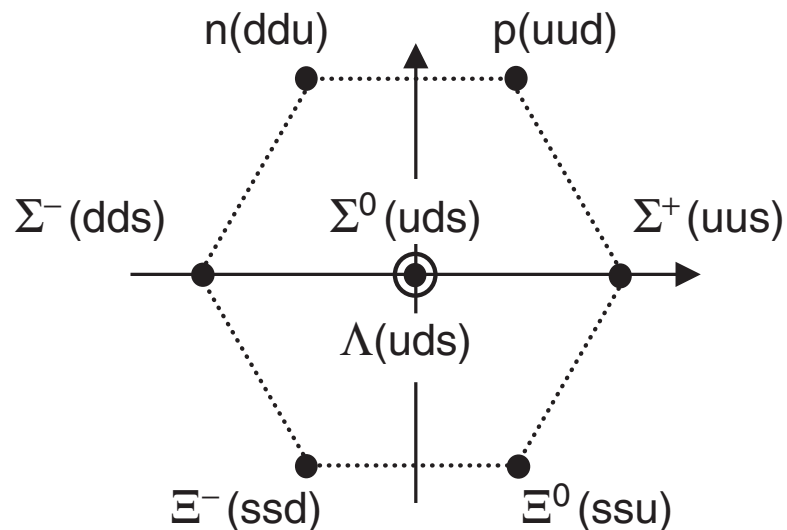
Masas del decuplete	
Δ	1230 MeV
Σ^*	1385 MeV
Ξ^*	1533 MeV
Ω	1670 MeV

Si la simetría de sabor de $SU(3)$ fuera exacta todas las masas serían las mismas.



Bariones observados del octete con $L=0$

- Los estados bariónicos del octete tienen spin $1/2$, y está formado de funciones de onda con simetría mixta de sabor y simetría mixta de espín.



Masas del octete	
p, n	940 MeV
Σ	1190 MeV
Λ	1120 MeV
Ξ	1320 MeV

Si la simetría de sabor de $SU(3)$ fuera exacta todas las masas serían las mismas.