Módulo de Teoría
Clase 5, 04-02-2021

Anamaría Font V.

Universidad Central de Venezuela

LA-CoNGA-physics

mattermost.redclara.net@afont

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

Campos Clásicos

1) Formulación Lagrangiana – Resumen

Campos: $\Phi_a(\mathbf{x}, t) = \Phi_a(x), \quad a = 1, 2, \ldots, N$

Acción S y Lagrangiano $\mathcal{L}$: $S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\Phi_a, \partial_\mu \Phi_a)$

Localidad: $\mathcal{L}$ depende de Φ_a y $\partial_\mu \Phi_a$ evaluados en el mismo punto del espacio-tiempo

Ecuaciones de movimiento: $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} = 0$

Ejemplo campo escalar real ϕ:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$, ec. de Klein-Gordon

2) Invariancia de Lorentz

Dos observadores A *y* B *con coordenadas* x^μ *y* $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$
deben observar las mismas ecuaciones de movimiento (edm)

N.B. En realidad se requiere invariancia de Poincaré, i.e. $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$

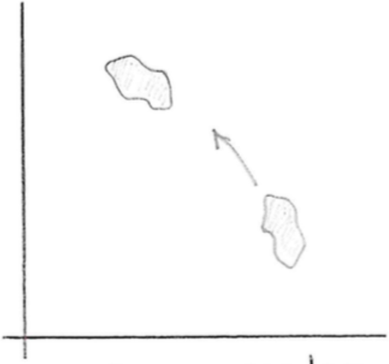
Como las traslaciones son sencillas nos concentramos en las transformaciones de Lorentz.

Las transformaciones de Lorentz tienen una representación en los campos.
E.g. campo escalar $\phi(x)$ con regla de transformación: $\boxed{\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)}$

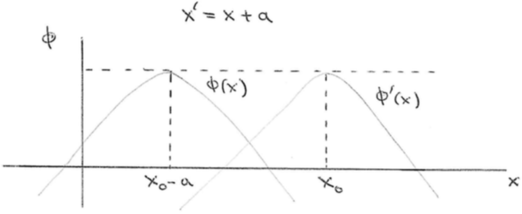
Significado: el campo transformado en el punto transformado es igual al campo original en el punto antes de transformar, i.e. $\phi'(x') = \phi(x)$

Para campos con índices espacio-tiempo (más precisamente con espín), la regla incluye la rep. de Lorentz. E.g. campo vectorial $A^\mu(x)$: $\boxed{A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x)}$

Transformación activa de campo escalar



campo escalar



A máximo en $x_0 - a$, B máximo en x_0

¿ Cómo garantizar que A y B con coordenadas x^μ y $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ observen las mismas edm ?

R: imponiendo que S sea invariante, lo cual se cumple si $\mathcal{L}$ transforma como un escalar, i.e.

$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x)$, o equivalentemente $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$, excepto por una derivada total

Demo: $$S' = \int d^4x'\, \mathcal{L}'(x') = \int d^4x\, \mathcal{L}(x) = S$$ $|\det\Lambda| = 1 \Rightarrow \int d^4x' = \int d^4x$

Ejemplo campo escalar real ϕ, $\phi'(x') = \phi(x)$

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2, \qquad \partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi = 0$$

$$\partial'_\mu\,\partial'^\mu\phi'(x') = \eta_{\mu\nu}\partial'^\mu\,\partial'^\nu\phi'(x') = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\partial^\alpha\,\partial^\beta\phi(x) = \eta_{\alpha\beta}\partial^\alpha\,\partial^\beta\phi(x) = \partial_\beta\partial^\beta\phi(x)$$

$$\Rightarrow \partial'_\mu\partial'^\mu\phi' + m^2\phi' = \partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi = 0$$

Similarmente, $\partial'_\mu\,\phi'(x')\partial'^\mu\phi'(x') = \partial_\mu\,\phi(x)\partial^\mu\phi(x) \;\Rightarrow\; \mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$

$$\eta_{\mu\nu}\,\Lambda^\mu{}_\alpha\,\Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}, \qquad \left(\Lambda^{-1}\right)^\alpha{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\alpha, \qquad \eta^{\mu\nu}\,\Lambda^\sigma{}_\mu\,\Lambda^\rho{}_\nu = \eta^{\sigma\rho}, \qquad \partial'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha\,\partial^\alpha$$

3) Simetrías y Teorema de Noether

Cada simetría contínua de $\mathcal{L}$ da lugar a una corriente conservada j^μ

i.e. las edm implican $\partial_\mu j^\mu = 0$, equivalente a $\partial_0 j^0 + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, sustitutyendo $j^\mu = (j^0, \mathbf{j})$

---

corriente j^μ conservada $\Rightarrow$ carga Q conservada (independiente de t)

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, j^0, \qquad \frac{dQ}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \partial_0 j^0 = -\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \qquad \text{asumiendo } \mathbf{j} \to 0 \text{ en } |\mathbf{x}| \to \infty$$

Simetría contínua significa parámetros contínuos, podemos trabajar infinitesimalmente, i.e.

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = \Phi(x) + \alpha \Delta \Phi(x), \qquad \alpha \text{ infinitesimal}$$

Es una simetría si deja las edm invariantes. Se cumple si S is invariante, y a su vez si

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) + \alpha \partial_\mu \mathcal{F}^\mu, \ \text{ i.e. } \Delta\mathcal{L} = \underbrace{\partial_\mu \mathcal{F}^\mu}_{\text{derivada total}} \ \text{ para algún } \mathcal{F}^\mu$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L} &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\,\Delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\,\Delta(\partial_\mu\Phi)\right] \\
&= \underbrace{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\right)\right]}_{\text{se anula por edm}}\Delta\Phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\,\Delta\Phi\right) = \partial_\mu\mathcal{F}^\mu
\end{aligned}
$$

$$
\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\,\Delta\Phi - \mathcal{F}^\mu\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\,\Delta\Phi - \mathcal{F}^\mu}
$$

Para varios campos $\qquad j^\mu = \sum_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\Delta\Phi_a - \mathcal{F}^\mu$

Ejemplo: campo escalar complejo

$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \, \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$,   simetría $U(1)$ global: $\phi \to e^{i\alpha}\phi$, $\phi^* \to e^{-i\alpha}\phi^*$, α constante

$\phi \to (1 + i\alpha + \cdots)\phi \;\Rightarrow\; \Delta\phi = i\phi$, similarmente $\Delta\phi^* = -i\phi^*$

$\mathcal{L} \to \mathcal{L} \;\Rightarrow\; \Delta\mathcal{L} = 0, \;\; \mathcal{F}^\mu = 0$

Tarea. Demostrar

a) $j^\mu = i\,(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi)$,   b) edm $\;\Rightarrow\; \partial_\mu j^\mu = 0$

N.B. Al acoplar con A_μ habrá un término $A_\mu j^\mu$ en $\mathcal{L}$.

Ejemplo: traslaciones y tensor de energía-momento

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - \epsilon^{\mu}, \qquad \Phi_a(x) \to \Phi_a(x+\epsilon) = \Phi_a(x) + \epsilon^{\nu}\partial_{\nu}\Phi_a(x),$$

Similarmente, $\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) + \epsilon^{\nu}\partial_{\nu}\mathcal{L}(x)$, notar $\epsilon^{\nu}\partial_{\nu}\mathcal{L}(x) = \epsilon^{\nu}\partial_{\mu}\left(\delta^{\mu}_{\nu}\mathcal{L}\right) \Rightarrow \mathcal{F}^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}\mathcal{L}$

$\exists$ 4 corrientes de Noether asociadas a traslaciones en t por ϵ^0, y en x^i, por ϵ^i, $i = 1, 2, 3$

$$j^{\mu} = \sum_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\Phi_a)}\Delta\Phi_a - \mathcal{F}^{\mu} \;\Rightarrow\; (j^{\mu})_{\nu} = \sum_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\Phi_a)}\partial_{\nu}\Phi_a - \delta^{\mu}_{\nu}\mathcal{L} \equiv T^{\mu}_{\nu}$$

T^{μ}_{ν} es el llamado tensor de energía-momento, satisface $\partial_{\mu}T^{\mu}_{\nu} = 0$

$\exists$ 4 cargas conservadas: $H = \int d^3x\, T^{00}, \qquad P^i = \int d^3x\, T^{0i}$

Ejercicio. Para $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\,\partial^{\mu}\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$, demostrar $P^i = \int d^3x\,\dot{\phi}\,\partial^i\phi$,

$$H = \int d^3x \left(\tfrac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \tfrac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \tfrac{1}{2}m^2\phi^2\right)$$

4) Formulación Hamiltoniana

- momento conjugado de $\Phi_a(x)$: $\quad \pi^a(x) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_a}$ función de x, no es P^i
- densidad Hamiltoniana: $\quad \mathcal{H} = \pi^a(x)\,\dot{\Phi}_a(x) - \mathcal{L}(x)$ depende de Φ_a y π^a
- Hamiltoniano: $\quad H = \int d^3x\, \mathcal{H}$
- ecs. de movimiento: $\quad \dot{\Phi}_a(\mathbf{x},t) = \dfrac{\partial H}{\partial \pi^a(\mathbf{x},t)}, \quad \dot{\pi}^a(\mathbf{x},t) = -\dfrac{\partial H}{\partial \Phi_a(\mathbf{x},t)}$

Ejemplo campo escalar real ϕ

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2 = \tfrac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \tfrac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2, \quad \pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}$$

$$H = \int d^3x\, \left(\tfrac{1}{2}\pi^2 + \tfrac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \tfrac{1}{2}m^2\phi^2\right)$$

Interludio matemático

Transformadas de Fourier

(3d) $f(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tilde{f}(\mathbf{p}),$ $\qquad \tilde{f}(\mathbf{p}) = \int d^3x\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}),$ a veces se omite la tilde

(Mink) $f(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip\cdot x} \tilde{f}(p),$ $\qquad \tilde{f}(p) = \int d^4x\, e^{ip\cdot x} f(x) \qquad p\cdot x = p^0x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$

Delta de Dirac

(1d) $\int dx\, \delta(x) = 1,$ $\qquad \delta(x) = \int \frac{dp}{(2\pi)}\, e^{ipx}$

(3d) $\int d^3x\, \delta^{(3)}(\mathbf{x}) = 1,$ $\qquad \delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$

Cuantización del campo escalar libre

1) El campo de Klein-Gordon como osciladores armónicos

En Mecánica Cuántica, q, p, H $\rightarrow$ operadores

En TCC, ϕ, π, H $\rightarrow$ operadores, ¿espectro de H con infinitos grados de libertad?

Para el campo libre hay una manera de desacoplar los grados de libertad

Se encuentra considerando la transformada de Fourier de $\phi(\mathbf{x}, t)$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\, \phi(\mathbf{p}, t), \qquad \phi(\mathbf{x}, t) = \phi^*(\mathbf{x}, t) \ \Rightarrow\ \phi^*(\mathbf{p}, t) = \phi(-\mathbf{p}, t)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{p}, t)}{\partial t^2} + (\mathbf{p}^2 + m^2)\phi(\mathbf{p}, t) = 0 \qquad \text{análogo a} \ \ \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

para cada valor de $\mathbf{p}$, $\phi(\mathbf{p}, t)$ resuelve la ec. del oscilador armónico con frecuencia

$$\boxed{\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}$$

cada modo de Fourier es un oscilador independiente con su frecuencia $\omega_{\mathbf{p}}$

1.1) Cuantización canónica

- Se comienza en el cuadro de Schrödinger, con $\phi(\mathbf{x})$, $\pi(\mathbf{x})$ independientes de t.
- $[q_a, p^b] = i\delta_a^b$, $[q_a, q_b] = [p^a, p^b] = 0$, se generaliza a

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] = [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0$$

- En la expansión de Fourier de $\phi(\mathbf{x})$ y $\pi(\mathbf{x})$ los modos de Fourier se tratan como osciladores de frecuencia $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, con sus propios $a_{\mathbf{p}}$ y $a_{\mathbf{p}}^\dagger$

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}}\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right) \qquad \text{análogo a} \quad q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i)\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \left(a_{\mathbf{p}}\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right) \qquad \text{análogo a} \quad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger)$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger \right) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad , \quad \pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i)\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \left(a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger \right) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

cambiando $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$ en el 2do término y usando $\omega_{-\mathbf{p}} = \omega_{\mathbf{p}}$

▷ reglas de conmutación de $\phi(\mathbf{x})$ y $\pi(\mathbf{x})$ $\Longleftrightarrow$ reglas de conmutación de $a_{\mathbf{p}}$ y $a^\dagger_{\mathbf{p}}$

$$\begin{array}{lcl} [\phi(\mathbf{x}),\phi(\mathbf{y})] = [\pi(\mathbf{x}),\pi(\mathbf{y})] = 0 & & [a_{\mathbf{p}},a_{\mathbf{p}'}] = [a^\dagger_{\mathbf{p}},a^\dagger_{\mathbf{p}'}] = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \\ [\phi(\mathbf{x}),\pi(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & & [a_{\mathbf{p}},a^\dagger_{\mathbf{p}'}] = (2\pi)^3\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \end{array}$$

Para demostrar en sentido $\Leftarrow$ se sustituye

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}} + a^\dagger_{-\mathbf{p}}\right)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad , \quad \pi(\mathbf{y}) = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{2}}\left(a_{\mathbf{p}'} - a^\dagger_{-\mathbf{p}'}\right)e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{y}}$$

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}),\pi(\mathbf{y})] &= -\frac{i}{2}\int\frac{d^3p\,d^3p'}{(2\pi)^6}\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_{\mathbf{p}}}}\left([a^\dagger_{-\mathbf{p}},a_{\mathbf{p}'}] - [a_{\mathbf{p}},a^\dagger_{-\mathbf{p}'}]\right)e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{y})} \\ &= i\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \end{aligned}$$

usando $[a_{\mathbf{p}},a^\dagger_{-\mathbf{p}'}] = (2\pi)^3\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{p}')$ y $\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}$

Tarea: comprobar $\Rightarrow$

▷ Hamiltoniano en términos de $a_{\mathbf{p}}$ y $a_{\mathbf{p}}^\dagger$

$$H = \int d^3x \int \frac{d^3p\, d^3p'}{(2\pi)^6} e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \left\{ -\frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}}}{4} \left(a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger\right)\left(a_{\mathbf{p}'} - a_{-\mathbf{p}'}^\dagger\right) + \frac{-\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}' + m^2}{4\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}}} \left(a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger\right)\left(a_{\mathbf{p}'} + a_{-\mathbf{p}'}^\dagger\right) \right\}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \tfrac{1}{2}\left[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger\right] \right). \tag{2.31}$$

Se encuentra a partir de $\quad H = \int d^3x \; \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right)$

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger\right) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad , \quad \pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i)\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \left(a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}'}^\dagger\right) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

Tarea: comprobar ec.(2.31) en Peskin + Schroeder

http://laconga.redclara.net

contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.