Módulo de Teoría
Clase 6, 09-02-2021

Anamaría Font V.

Universidad Central de Venezuela

LA-CoNGA-physics

mattermost.redclara.net@afont

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

Recap clase 5

* invariancia de Lorentz, i.e. bajo $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$, de las ecs. de mov. requiere S invariante

Como $S = \int d^4x\, \mathcal{L}$ se cumple siempre que $\mathcal{L}$ sea un escalar de Lorentz, i.e $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$

Ejemplos

$$\mathcal{L} = \partial_{\mu}\phi^* \partial^{\mu}\phi - m^2 \phi^* \phi$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \,, \quad F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$$

* Teorema de Noether

simetría continua $\Rightarrow$ corriente conservada j^μ
(S invariante)

$$\phi_a \to \phi_a + \alpha \Delta\phi_a \quad , \quad \mathcal{L} \to \mathcal{L} + \alpha \partial_\mu \mathcal{J}^\mu$$

$$j^\mu = \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \Delta\phi_a - \mathcal{J}^\mu$$

ecs. de mov.

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0$$

$$\Rightarrow Q = \int d^3x \, j^0 \quad , \quad \frac{dQ}{dt} = 0$$

Ejemplos

1) $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$, simetría U(1) global $\phi \to e^{i\alpha}\phi$, $\phi^* \to e^{-i\alpha}\phi^*$

$j^\mu = i(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi)$ tarea 1

2) $\mathcal{L} = \sum_{a=1}^{2} \partial_\mu \phi^*_a \partial^\mu \phi_a - m^2 \phi^*_a \phi_a$ 2 campos escalares complejos de igual m

conveniente construir un doblete $\varphi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$, $\varphi^\dagger = (\phi_1^* \ \phi_2^*)$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^\dagger \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi$$

simetría SU(2) global $\varphi \to e^{i\frac{\theta^i}{2}\sigma^i}\varphi$, σ^i : matrices de Pauli

Ejercicio : hallar las corrientes conservadas

* Formulación Hamiltoniana

momento conjugado $\pi^a = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a}$

$$\mathcal{H} = \pi^a \dot{\phi}_a - \mathcal{L} \quad , \quad H = \int d^3x \, \mathcal{H}$$

Ejemplo $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)$$

* Cuantización del campo escalar libre

tomando transformada de Fourier se descubre que la solución general de $\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$ es superposición de osciladores armónicos con frecuencia $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

Para cuantizar $\phi(\vec{x}, t)$ se cuantizan los osciladores

Se procede en cuadro de Schrödinger

operadores $\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x})$ satisfacen reglas de conmutación

$$[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 0$$

$$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

análogo a

$$[q_a, q_b] = [p^a, p^b] = 0$$

$$[q_a, p^b] = i\delta_a^b$$

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$

$$\phi^\dagger = \phi$$

$$\boxed{\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}}$$

$$\pi(\vec{x}) = -i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$

Se demuestra que

$$[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}] = [a^\dagger_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}] = 0$$

$$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \qquad [a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')$$

demo $\Leftarrow$ clase 5

demo $\Rightarrow$ tarea 2

operadores de creación y aniquilación

Hamiltoniano

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right)$$

sustituyendo $\phi(\vec{x})$, $\pi(\vec{x})$

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2}\omega_{\vec{p}} \left(a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a^\dagger_{\vec{p}} \right)$$

tarea 2

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left(a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + \frac{1}{2}\left[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}}\right] \right)$$

$$\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

Estado de vacío

En analogía con el osc. armónico en mecánica cuántica se define el estado de vacío $|0\rangle$ tal que

$$a_{\vec p}|0\rangle = 0 \qquad \forall\, \vec p$$

Actuando con H, $H|0\rangle = \tilde{E}_0|0\rangle$

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \omega_{\vec p}\left(a^\dagger_{\vec p} a_{\vec p} + \frac{1}{2}[a_{\vec p}, a^\dagger_{\vec p}]\right) \Rightarrow \tilde{E}_0 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2}\omega_{\vec p}\, [a_{\vec p}, a^\dagger_{\vec p}]$$

pero $[a_{\vec p}, a^\dagger_{\vec p}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \longrightarrow \infty$

¿qué hacer?

Hay realmente 2 divergencias, $\delta^{(3)}(0) \to \infty$, $\int d^3p \sqrt{\vec{p}^2+m^2} \to \infty$

$$(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}) = \int d^3x\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \xrightarrow[\vec{p}\to 0]{} \int d^3x = \text{volumen del espacio} \to \infty$$

divergencia "infrarroja"

Colocando el sistema en caja de volumen V podemos considerar la densidad de energía

$$\frac{\tilde{E}_0}{V} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2}\omega_{\vec{p}} = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d^3p \sqrt{\vec{p}^2+m^2} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty d|\vec{p}|\,|\vec{p}|^2 \sqrt{\vec{p}^2+m^2} \to \infty$$

divergencia "ultravioleta"

se puede introducir un corte para $|\vec{p}|$, en este caso procedemos simplemente ignorando $\tilde{E}_0$ ya que no es observable* porque sólo se miden diferencias de energía

* en ausencia de gravedad

Ordenamiento normal

Por razones justificadas trabajaremos con $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}$

Esto es equivalente a trabajar con ordenamiento normal de productos de campos

Para un producto de campos libres $\phi_1(\vec{x}_1) \ldots \phi_n(\vec{x}_n)$ se define el producto normal $:\phi_1(\vec{x}_1) \ldots \phi_n(\vec{x}_n):$ como el producto usual con todos los ops. de aniquilación $a_{\vec{p}}$ colocados a la derecha. Para H

$$H = \int d^3x : \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right) :$$

tarea 2

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \omega_{\vec{p}} : \left(a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a^\dagger_{\vec{p}} \right) : = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \omega_{\vec{p}} \left(a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} \right) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}$$

Partículas

Se demuestra $[H, a_{\vec{p}}] = -\omega_{\vec{p}}\, a_{\vec{p}}$, $[H, a^\dagger_{\vec{p}}] = \omega_{\vec{p}}\, a^\dagger_{\vec{p}}$ ejercicio

$$\Rightarrow H\left(a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle\right) = \omega_{\vec{p}}\, a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle$$

$$H\left(a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle\right) = \underbrace{\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}}_{=E_{\vec{p}}}\left(a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle\right)$$

$= E_{\vec{p}}$ energía relativista de partícula masa m, momento $\vec{p}$

También se calcula el autovalor de $\vec{P}$ dado por

$$\vec{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \vec{p}\, a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}$$

$$\vec{P}\left(a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle\right) = \vec{p}\left(a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle\right)$$

Ejercicio

clase 5 $\quad P^i = \int d^3x\, T^{0i}$

para el campo escalar libre

$$P^i = \int d^3x\, \dot{\phi}\, \partial^i \phi$$

$$\vec{P} = -\int d^3x\, \pi(\vec{x}) \vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

$a^\dagger_{\vec p}$ crea momento $\vec p$ y energía $E_{\vec p} = \sqrt{\vec p^2 + m^2}$

$a^\dagger_p |0\rangle$ se interpreta como el estado de una partícula con $\vec p$ y $E_{\vec p}$

Además
$$H\,(a^\dagger_{\vec k}\, a^\dagger_{\vec p}|0\rangle) = (E_{\vec k} + E_{\vec p})(a^\dagger_{\vec k}\, a^\dagger_{\vec p}|0\rangle)$$
$$\vec P\,(a^\dagger_{\vec k}\, a^\dagger_{\vec p}|0\rangle) = (\vec k + \vec p)\,(a^\dagger_{\vec k}\, a^\dagger_{\vec p}|0\rangle)$$

y así sucesivamente.

Tenemos un espacio de estados (espacio de Fock)

$$|0\rangle, \qquad a^\dagger_{\vec p}|0\rangle, \qquad a^\dagger_{\vec p}\, a^\dagger_{\vec k}|0\rangle, \qquad a^\dagger_{\vec p}\, a^\dagger_{\vec k}\, a^\dagger_{\vec q}|0\rangle, \; \ldots$$

vacío   1-partícula   2-partículas   3-partículas ...

operador Número $\quad N = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, a^\dagger_{\vec p}\, a_{\vec p}\,, \qquad [N, \underbrace{H}_{H \text{ libre}}] = 0$

Notar $a^\dagger_{\vec p}\, a^\dagger_{\vec k}|0\rangle = a^\dagger_{\vec k}\, a^\dagger_{\vec p}|0\rangle \Leftarrow [a^\dagger_{\vec p}, a^\dagger_{\vec k}] = 0$

los dos estados son idénticos

$\exists \quad a^\dagger_{\vec p}\, a^\dagger_{\vec p} \cdots a^\dagger_{\vec p}|0\rangle$ estado de n-partículas con momento $\vec p$

se concluye que las partículas asociadas al campo de Klein-Gordon son bosones

También se verifica

$\vec J\left(a^\dagger_{\vec p}|0\rangle\right)\Big|_{\vec p = 0} = 0 \Rightarrow$ espin 0

$\vec J$ es la carga conservada correspondiente a rotaciones

Normalización

Se escoge $\langle 0|0\rangle = 1$

Denotamos el estado de 1-partícula $|\vec{p}\rangle$

Hemos visto $|\vec{p}\rangle \propto a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle$

La normalización apropiada es

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}}\, a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle$$

razón $\quad \langle \vec{k}|\vec{p}\rangle = 2(2\pi)^3 \underbrace{E_{\vec{k}}\, \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{p})}_{\text{invariante de Lorentz}}$ $\qquad \langle 0|a_{\vec{k}} a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{p})$

$k^\mu = (E_{\vec{k}}, \vec{k})$, $k'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu k^\nu$

similar para p^μ

$$E_{\vec{k}'}\, \delta^{(3)}(\vec{k}'-\vec{p}') = E_{\vec{k}}\, \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{p})$$

demo: ver Peskin + Schroeder

Recapitulando

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}}\, a^\dagger_{\vec{p}} |0\rangle$$

$$\phi(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{p}\rangle$$

$$\langle 0 | \phi(\vec{x}) | \vec{p}\rangle = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

Similar a

$$|\vec{x}\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{p}\rangle$$

$$\langle \vec{x} | \vec{p}\rangle = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

en Mec. Cuántica

$\phi(\vec{x})$ actuando sobre el vacío crea una partícula en $\vec{x}$

Campo escalar complejo libre

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

$\mathcal{H}$ en tarea 1

$$\phi(\bar{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\bar{p}}}} \left(b_{\bar{p}} e^{i\bar{p}\cdot\bar{x}} + c^\dagger_{\bar{p}} e^{-i\bar{p}\cdot\bar{x}} \right) \neq \phi^\dagger(\bar{x})$$

$$\pi(\bar{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, i \sqrt{\frac{E_{\bar{p}}}{2}} \left(b^\dagger_{\bar{p}} e^{-i\bar{p}\cdot\bar{x}} - c_{\bar{p}} e^{i\bar{p}\cdot\bar{x}} \right)$$

$$[\phi(\bar{x}), \pi(\bar{y})] = i\delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y}) \quad , \quad [\phi(\bar{x}), \pi^\dagger(\bar{y})] = 0 \quad , \text{etc}$$

$$[b_{\bar{p}}, b^\dagger_{\bar{p}'}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\bar{p}-\bar{p}') \;;\quad [c_{\bar{p}}, c^\dagger_{\bar{p}'}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\bar{p}-\bar{p}') \;, \text{etc}$$

2 operadores de creación $b_{\vec{p}}^{+}$ y $c_{\vec{p}}^{+}$

crean 2 tipos de partículas de igual masa

se interpretan como partículas y antipartículas

tienen carga opuesta

clase 5, tarea 1: corriente Noether simetría $U(1)$ $\phi \to e^{i\alpha}\phi$

$$j^\mu = i(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi) \quad , \quad Q = \int d^3x\, j^0$$

$\phi^* \to e^{-i\alpha}\phi$

al cuantizar $Q = i\int d^3x \, :(\pi\phi - \phi^+\pi^+):$

$$Q = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(c_{\vec{p}}^{+}c_{\vec{p}} - b_{\vec{p}}^{+}b_{\vec{p}}\right)$$

$c^\dagger_{\bar p}|0\rangle$ y $b^\dagger_{\bar p}|0\rangle$ tienen Q opuesta

antipartícula partícula

$$\phi \sim b_{\bar p}\, e^{i\bar p\cdot\bar x} + c^\dagger_{p}\, e^{-i\bar p\cdot\bar x}$$

$$\phi^\dagger \sim b^\dagger_{\bar p}\, e^{-i\bar p\cdot\bar x} + c_p\, e^{i\bar p\cdot\bar x}$$

para terminar de entender hay que considerar la dependencia temporal

El campo de Klein-Gordon en espacio-tiempo

Hasta ahora $\phi(\bar{x}), \pi(\bar{x})$ en cuadro de Schrödinger

Para obtener $\phi(\bar{x},t), \pi(\bar{x},t)$, pasamos al cuadro de Heisenberg

Schrödinger	Heisenberg
$\mathcal{O}_S$	$\mathcal{O}_H = e^{iHt}\mathcal{O}_S e^{-iHt}$
	$i\dfrac{\partial \mathcal{O}_H}{\partial t} = [\mathcal{O}_H, H]$

asumiendo $\dfrac{\partial \mathcal{O}_S}{\partial t} = 0$

Entonces

$$\phi(x) = \phi(\bar{x},t) = e^{iHt}\phi(\bar{x})e^{-iHt}$$

$$\pi(x) = \pi(\bar{x},t) = e^{iHt}\pi(\bar{x})e^{-iHt}$$

En el cuadro de Heisenberg las reglas de conmutación son a igual tiempo

$$[\phi(\bar{x},t), \phi(\bar{y},t)] = [\pi(\bar{x},t), \pi(\bar{y},t)] = 0$$

$$[\phi(\bar{x},t), \pi(\bar{y},t)] = i\,\delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y})$$

Para el campo Klein-Gordon (escalar real libre)

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\pi^2(\bar{x},t) + \frac{1}{2}(\bar{\nabla}\phi(\bar{x},t))^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(\bar{x},t) \right)$$

Se demuestra (tarea 2)

$$[\phi(\bar{x},t), H] = i\pi(\bar{x},t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\phi(\bar{x},t) = \pi(\bar{x},t)$$

$$[\pi(\bar{x},t), H] = i(\bar{\nabla}^2 - m^2)\phi(\bar{x},t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\pi(\bar{x},t) = (\bar{\nabla}^2 - m^2)\phi(\bar{x},t)$$

Por lo tanto $\quad \dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = (\bar{\nabla}^2 - m^2)\phi \quad$ Ec. de Klein-Gordon

Campos en espacio-tiempo

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(e^{iHt} a_{\vec{p}} e^{-iHt} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + e^{iHt} a^\dagger_{\vec{p}} e^{-iHt} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$

pero $e^{iHt} a_{\vec{p}} e^{-iHt} = a_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t}$, $e^{iHt} a^\dagger_{\vec{p}} e^{-iHt} = a^\dagger_p e^{iE_{\vec{p}}t}$

demo: $[H, a_{\vec{p}}] = -E_{\vec{p}} a_{\vec{p}} \Rightarrow H a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}} (H - E_{\vec{p}}) \Rightarrow H^n a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}} (H - E_{\vec{p}})^n$

$$e^{iHt} a_{\vec{p}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} H^n a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} (H - E_{\vec{p}})^n = a_{\vec{p}} e^{i(H - E_{\vec{p}})t}$$

$$e^{iHt} a_{\vec{p}} e^{-iHt} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} = a_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} = a_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x}$$

$p\cdot x = p_\mu x^\mu = E_{\vec{p}} t - \vec{p}\cdot\vec{x}$, $p^\mu = (E_{\vec{p}}, \vec{p})$, $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

$$\boxed{\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} + a^{\dagger}_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x} \right)} \quad , \quad \pi(\vec{x},t) = \frac{\partial \phi(\vec{x},t)}{\partial t}$$

se observa

* dualidad onda-partícula

$\phi(x)$ crea y destruye partículas

es combinación de soluciones $e^{\mp ip\cdot x}$ de $\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$

$-p^2 + m^2 = 0$

$$e^{\mp ip\cdot x} = e^{\mp i(E_{\vec{p}} t - \vec{p}\cdot\vec{x})}$$

* aparecen $e^{-iE_{\vec{p}}t}$ y $e^{iE_{\vec{p}}t}$ pero $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} > 0$

* $\phi(x)$ no es una función de onda, es un campo cuántic

$a_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x}$	$a^{\dagger}_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x}$
destruye partícula de energía $E_{\vec{p}}$	crea partícula de energía $E_{\vec{p}}$

mas general antipartícula

Próximamente ...

* causalidad

necesitaremos el resultado

$$\boxed{\int \frac{d^3p}{2E_{\vec{p}}} \text{ es invariante de Lorentz}}$$

$E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

demo: $\displaystyle \int \frac{d^3p}{2E_{\vec{p}}} = \int \underbrace{d^4p}_{\text{invariante}} \; \underbrace{\delta(p^2 - m^2)}_{\text{invariante}} \Big|_{p^0>0}$

invariante $p^2 = p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - \vec{p}^2$

luego se evalúa la integral en p^0 usando

$$\int dx\, f(x)\, \delta(g(x)) = \sum_{\substack{i \\ g(x_i)=0}} \frac{1}{|g'(x_i)|} f(x_i)$$

$g = p^2 - m^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2$, $g' = 2p^0$

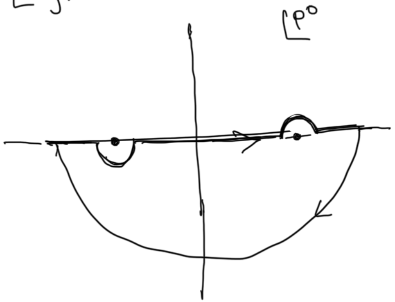
g se anula en $p^0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \pm E_{\vec{p}}$

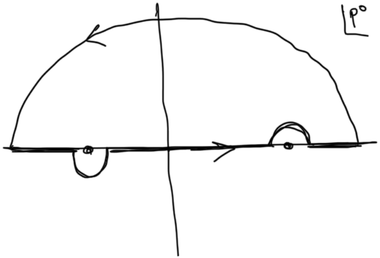
* Propagador de Feynman

Advertencia

aparecen integrales de contorno en el plano complejo y se evalúan usando el teorema del residuo

E.g.





http://laconga.redclara.net

contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.