

Módulo de Teoría

Clase 8, 16-02-2021

Anamaría Font V.

Universidad Central de Venezuela

LA-CoNGA-physics

`mattermost.redclara.net@afont`



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

UAN
UNIVERSIDAD NACIONAL



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE
INGENIERÍA

UNMSM



Université
de Paris

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN



CLARA

DBACCESS

frontier x
PHYSICS

Recap clase 7 - Interacciones

caso de estudio

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

$$H = H_0 + H_{int}$$

$$H_{int} = \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

$$\phi_H(\bar{x}, t) = e^{iHt} \phi_S(\bar{x}) e^{-iHt}$$

$$\phi_H(x) = U^\dagger(t, 0) \phi_I(x) U(t, 0)$$

$$U(t, t') = e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0 t'}$$

$$U(t', t') = 1 \quad \text{propiedades}$$

$$\begin{aligned} \phi_I(\bar{x}, t) &= e^{iH_0 t} \phi_S(\bar{x}) e^{-iH_0 t} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}) \end{aligned}$$

$p^0 = E_{\vec{p}}$

$$U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3)$$

$$U(t_1, t_3) U^\dagger(t_2, t_3) = U(t_1, t_2)$$

Tarea 3

$$i \frac{\partial U(t, t')}{\partial t} = H_I(t) U(t, t') \quad , \quad H_I(t) = e^{iH_0 t} H_{int} e^{-iH_0 t}$$

Fórmula
de Dyson

$$U(t, t') = T \left\{ \exp \left(-i \int_{t'}^t dt'' H_I(t'') \right) \right\}$$

T: ordenamiento
temporal

Expansión perturbativa

$$U(t, t') = 1 - i \int_{t'}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \dots$$

orden 1 orden 2 ...

Funciones de correlación

$$\langle \Omega | T \{ \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) \dots \phi_H(x_n) \} | \Omega \rangle$$

$|\Omega\rangle$: estado de vacío en presencia de H_{int}
= estado de mínima energía de $H = H_0 + H_{int}$

recordar
 $|0\rangle$ es el estado
de mínima energía
de H_0 , $H_0|0\rangle = 0$
 $a_{\vec{p}}|0\rangle = 0$, $\forall \vec{p}$

Expansión perturbativa

$$\stackrel{\leftarrow}{=} \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) \exp(-i \int_{-T}^T dt H_I(t)) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp(-i \int_{-T}^T dt H_I(t)) \} | 0 \rangle}$$

¡ se calcula con $|0\rangle$ y $\phi_I(x)$!

$$\phi_I(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x})$$

"demo" : primero se busca relacionar $|R\rangle$ y $|0\rangle$

$$U(0, -T)|0\rangle = e^{-iHT} e^{iH_0 T} |0\rangle = e^{-iHT} |0\rangle$$

$$1 = \sum_n |n\rangle \langle n|$$

base de autoestados de H

$$U(0, -T)|0\rangle = \sum_n e^{-iHT} |n\rangle \langle n|0\rangle = |R\rangle \langle R|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle$$

escogiendo $H|R\rangle = 0$ $\rightarrow 0, T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)$

$$|R\rangle = \frac{1}{\langle R|0\rangle} \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} U(0, -T)|0\rangle$$

similarmente

$$\langle R| = \frac{1}{\langle 0|R\rangle} \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0|U(T, 0)$$

fijando $\langle R|R\rangle = 1$

$$|\langle 0|R\rangle|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0|U(T, -T)|0\rangle$$

$$U(T, -T) = \mathcal{T} \left\{ \exp\left(-i \int_{-T}^T dt H_I(t)\right) \right\}$$

luego se sustituye $|R\rangle$ en la función de correlación. E.g.

$$\langle R | \mathbf{T} \{ \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) \} | R \rangle = \frac{1}{|\langle 0 | R \rangle|^2} \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \langle 0 | U(T,0) \mathbf{T} \{ \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) \} U(0,-T) | 0 \rangle$$

Pero $\phi_H(x_1) = U^\dagger(t_1,0) \phi_I(x_1) U(t_1,0)$

escogiendo $t_1 > t_2$

$$\langle 0 | U(T,0) U^\dagger(t_1,0) \phi_I(x_1) U(t_1,0) U^\dagger(t_2,0) \phi_I(x_2) U(t_2,0) U(0,-T) | 0 \rangle$$

propiedad de U, tarea 3

$$= \langle 0 | U(T,t_1) \phi_I(x_1) U(t_1,t_2) \phi_I(x_2) U(t_2,-T) | 0 \rangle$$

ordenado temporalmente, similar escogiendo $t_2 > t_1$

además, U's dadas por fórmula de Dyson, e.g. $U(t_1,t_2) = \mathbf{T} \left\{ \exp \left(-i \int_{t_1}^{t_2} dt H_I \right) \right\}$

al final, numerador = $\langle 0 | \mathbf{T} \{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \exp \left(- \int_{-T}^T dt H_I \right) \} | 0 \rangle$

Teorema de Wick

$$\exp\left(-i \int_{-T}^T dt H_I(t)\right) = 1 - i \int_{-T}^T dt H_I(t) + \dots, \quad H_I(t) = \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4$$

hace falta calcular

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) \} | 0 \rangle, \quad \phi_I(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{i\vec{p}\cdot x} \right)$$



para evaluar se mueven todos los $a_{\vec{p}}$ a la derecha, i.e. se ordena normalmente

$$a_{\vec{p}} |0\rangle = 0$$

$$\phi_I(x) = \phi_I^+(x) + \phi_I^-(y)$$

$$\phi_I^+ |0\rangle = 0, \quad \langle 0 | \phi_I^- = 0$$

$$[\phi_I^+(x), \phi_I^-(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{p}\cdot(x-y)}}{2E_{\vec{p}}} = D(x-y)$$

$$\phi_I^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\cdot x}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}$$

tiene $e^{-iE_{\vec{p}}t}$
"frecuencia +"

$$\phi_I^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a_{\vec{p}}^\dagger e^{i\vec{p}\cdot x}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}$$

tiene $E^{iE_{\vec{p}}t}$
"frecuencia -"

notación: $\phi_{\mathbf{r}}(x_1) = \phi_1$

Definición: contracción

$$\overbrace{\phi_1 \phi_2} = D_F(x_1 - x_2)$$

y contracciones, e.g.

$$\overbrace{\phi_1 \phi_2} \phi_3 \phi_4 \phi_5 \phi_6 = D_F(x_1 - x_2) \phi_3 \phi_4 \phi_5 \phi_6$$

$$\overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} \phi_5 \phi_6 = D_F(x_1 - x_4) D_F(x_3 - x_5) \phi_2 \phi_6$$

$$\overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3} \phi_4 \overbrace{\phi_5 \phi_6} = D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) D_F(x_5 - x_6)$$

D_F : propagador de Feynman

$$D_F(x_1 - x_2) = \theta(x_1^0 - x_2^0) D(x_1 - x_2) + \theta(x_2^0 - x_1^0) D(x_2 - x_1)$$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p \cdot (x_1 - x_2)}$$

$$= D_F(x_2 - x_1) = \langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \} | 0 \rangle$$

Definición: ordenamiento normal

$:\phi_1 \dots \phi_n:$ = el producto con todos los ϕ_i^{\pm} a la derecha

E.g.

$$:\phi_1 \phi_2: = :(\phi_1^+ + \phi_1^-)(\phi_2^+ + \phi_2^-): = \phi_1^+ \phi_2^+ + \phi_1^- \phi_2^+ + \phi_1^- \phi_2^- + \phi_2^- \phi_1^+$$

$:\phi_1 \phi_2 \phi_3:$ = ejercicio

$$\langle 0 | : \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n : | 0 \rangle = 0$$

TEOREMA DE WICK

$T\{\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n\} = :\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n: + :$ todas las contracciones posibles:

$$\begin{aligned}
T\{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n\} &= :\phi_1\cdots\phi_n: + (\overbrace{\phi_1\phi_2}^{\quad}:\phi_3\cdots\phi_n: + \cdots) \quad 1 \quad \sqcap \\
&+ (\overbrace{\phi_1\phi_2}^{\quad}\overbrace{\phi_3\phi_4}^{\quad}:\phi_5\phi_6\cdots\phi_n: + \cdots) \quad 2 \quad \sqcap \quad \sqcap \\
&+ (\overbrace{\phi_1\phi_2}^{\quad}\overbrace{\phi_3\phi_4}^{\quad}\overbrace{\phi_5\phi_6}^{\quad}:\phi_7\cdots\phi_n: + \cdots) \quad 3 \quad \sqcap \quad \sqcap \\
&+ \quad \vdots
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle 0 | T\{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n\} | 0 \rangle$ fácil de determinar. E.g

$$\langle 0 | T\{\phi_1\} | 0 \rangle = 0 \quad , \quad T\{\phi_1\} = \phi_1 = :\phi_1:$$

$$\langle 0 | T\{\phi_1\phi_2\} | 0 \rangle = \overbrace{\phi_1\phi_2}^{\quad} = D_F(x_1-x_2) \quad T\{\phi_1\phi_2\} = :\phi_1\phi_2: + \overbrace{\phi_1\phi_2}^{\quad}$$

$$\langle 0 | T\{\phi_1\phi_2\phi_3\} | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} | 0 \rangle = D_F(x_1-x_2)D_F(x_3-x_4) + D_F(x_1-x_3)D_F(x_2-x_4) + D_F(x_1-x_4)D_F(x_2-x_3)$$

etc

términos con el máximo número de contracciones

demo: se prueba para $n=2$ y luego por inducción

$n=2$, consideramos primero $x_1^\circ > x_2^\circ$

$$T\{\phi_1, \phi_2\} = (\phi_1^+ + \phi_1^-)(\phi_2^+ + \phi_2^-) = \underbrace{\phi_1^+ \phi_2^+ + \phi_1^- \phi_2^+ + \phi_1^- \phi_2^-}_{\text{ordenados normal}} + \phi_1^+ \phi_2^- \\ = \phi_2^- \phi_2^+ + [\phi_1^+, \phi_2^-]$$

$$T\{\phi_1, \phi_2\} = (\phi_1^+ \phi_2^+ + \phi_1^- \phi_2^+ + \phi_1^- \phi_2^- + \phi_2^- \phi_2^+) + [\phi_1^+, \phi_2^-] = : \phi_1 \phi_2 : + D(x_1 - x_2)$$

similar para $x_2^\circ > x_1^\circ$. luego

$$T\{\phi_1, \phi_2\} = \Theta(x_1^\circ - x_2^\circ) [: \phi_1 \phi_2 : + D(x_1 - x_2)] + \Theta(x_2^\circ - x_1^\circ) [: \phi_1 \phi_2 : + D(x_2 - x_1)] \\ = : \phi_1 \phi_2 : + D_F(x_1 - x_2) = : \phi_1 \phi_2 : + \overline{\phi_1 \phi_2}$$

Ejercicio: comprobar el teorema para $T\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ usando inducción

Tarea 3 ayuda: suficiente considerar $x_1^\circ > x_2^\circ > x_3^\circ$

Diagramas de Feynman

Wick $\Rightarrow \langle 0 | T \{ \phi_1 \dots \phi_n \} | 0 \rangle =$ suma de productos de propagadores D_F
💡 se puede representar gráficamente

Cada punto x_i se representa por un punto

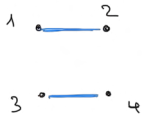
cada $D_F(x_i - x_j)$ por una línea entre x_i y x_j

Ejemplos

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \} | 0 \rangle = D_F(x_1 - x_2)$$



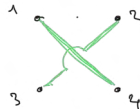
$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | 0 \rangle = D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3)$$



+



+



En la práctica se hace al revés, i.e. diagrama \Rightarrow resultado

Ej. $\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | 0 \rangle$

1) se dibujan los puntos

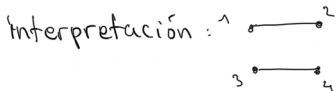


2) se ven las maneras distintas de unirlos a pares, sin dejar ninguno suelto



3) se suman los diagramas asignando los propagadores

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | 0 \rangle = D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3)$$



partículas se crean en unos puntos, se propagan, luego se destruyen en otros

Más interesante: $\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n \exp(-\int dt H_{\text{I}}(t)) \} | 0 \rangle$, $H_{\text{I}} = \int d^3z \frac{\lambda \phi^4}{4!}$

recordar notación $\phi = \phi_{\text{I}}$

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \left(1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z) + \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4z \phi^4(z) \int d^4w \phi^4(w) + \dots \right) \} | 0 \rangle$$

¡mas contracciones!

Ejemplo, $n=2$, término de orden λ $\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4z \phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z) \} | 0 \rangle$

piezas

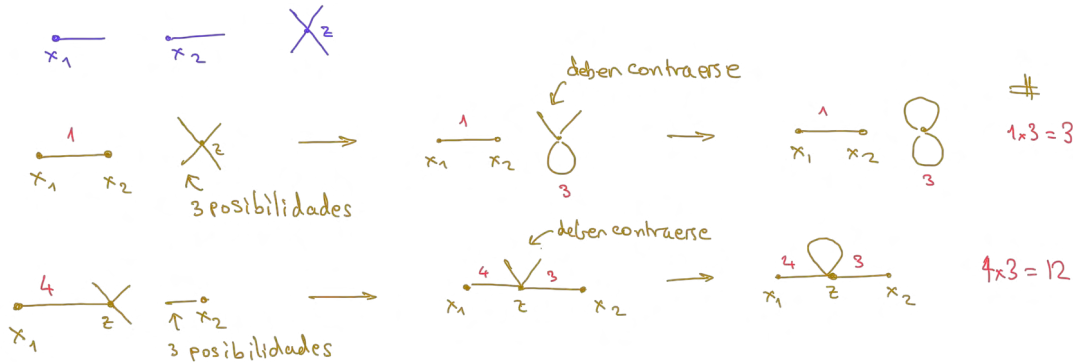


cada pata representa un campo

¿ Cuántas contracciones completas se pueden armar? R: 5×3

Para empezar hay 6 patas, una de ellas se puede contraer con 5, de las 4 sobrantes una de ellas se puede contraer con 3, quedan 2 forzadas a contraerse

¿ De cuántas maneras? R: de 2



$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4z \phi^4(z) \} | 0 \rangle$$

$$= 3 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4z D_F(z - z) D_F(z - z) + 12 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z)$$



+




Reglas de Feynman (para transcribir diagramas)

Para cada tipo de diagrama posible

1. por cada propagador  = $D_F(x-y)$

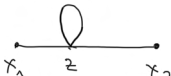
2. por cada vértice  = $(-i\lambda) \int d^4z$

3. por cada punto externo  = 1

4. se divide por el factor de simetría

(= número de formas de intercambiar componentes sin alterar el diagrama)

Ejemplo


$$= \frac{(-i\lambda)}{2} \int d^4z D_F(x_1-z) D_F(x_2-z) D_F(z-z)$$

factor de simetría 2, notar $12 \frac{(-i\lambda)}{4!} = -\frac{i\lambda}{2}$

incluso para $n=2$ los términos de orden $\lambda^2, \lambda^3, \dots$ son bastante complicados

Ejemplos

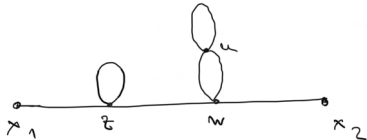
1) $n=2$, término de orden λ^2 : $9 \times 7 \times 5 \times 3$ posibles contracciones totales
7 tipos de diagramas

Ejercicio, Tarea 3

2) $n=2$, término de orden λ^3 : $13!! = 13 \times 11 \times 9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1 = 135135$ posibles contracciones

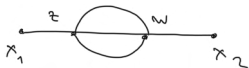
muchos tipos de diagramas, e.g.

mas detalles en Peskin + Schroeder



* ver también PS para catálogo de factores de simetría.

e.g.



$$s = 3!$$

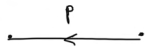
Interpretación

- el factor de vértice $-i\lambda$ es la amplitud para la emisión o absorción de partículas en el vértice.
La integral $\int d^4z$ es la suma sobre todos los puntos donde puede ocurrir la emisión/absorción.
- el propagador $D_F(x-y)$ es la amplitud para ir de x a y
- en cada diagrama se multiplican las amplitudes (propagadores y vértices)

Reglas de Feynman en espacio de momentos

* propagadores $D_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p \cdot (x-y)}$

se asigna momento a cada propagador,
indicando la dirección con una flecha



el orden no importa porque $D_F(x-y) = D_F(y-x)$

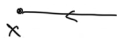
* vértices cuando 4 líneas se encuentran en un vértice hay conservación de momento (cuadrimomento, o sea energía y momento lineal)



$$\int d^4 z e^{-i p_1 z} e^{-i p_2 z} e^{-i p_3 z} e^{i p_4 z}$$

$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 - p_4)$$


* puntos externos



ahora llevan $e^{-i p x}$

Reglas

1) por cada propagador $\xrightarrow{P} = \frac{i}{P^2 - m^2 + i\epsilon}$

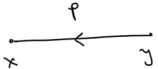
2) por cada vértice  $= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$

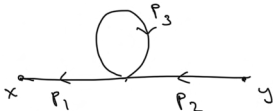
3) por cada punto externo $\overset{P}{\bullet} \xleftarrow{x} = e^{-iP \cdot x}$

4) se integra sobre todos los momentos $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$

5) se divide por el factor de simetría

Ejemplos

1)  = $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p \cdot x} e^{i p \cdot y} = D_F(x-y)$

2) 



$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p_1 \cdot x} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} e^{i p_2 \cdot y} \frac{i}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} (-i\lambda) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 + p_3 - p_1)$$

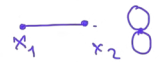
$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p \cdot (x-y)} \left(\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)^2 \left\{ \frac{-i\lambda}{2} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{i}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} \right\}$$

Próximamente

- terminar funciones de correlación

$\langle \Omega | T \{ \phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n) \} | \Omega \rangle =$ suma de todos los diagramas conectados con n puntos externos

E.g. $\langle \Omega | T \{ \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) \} | \Omega \rangle =$  $+$  $+$ (orden λ^2) + ...
+ tarea 3

 diagrama desconectado
 x_1, x_2 desconectados
del resto

- empezar con choques (scattering)



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongaphysics



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.