Módulo de Teoría
Clase 9, 18-02-2021

Anamaría Font V.

Universidad Central de Venezuela

LA-CoNGA-physics

`mattermost.redclara.net@afont`

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

Recap clase 8

$$\langle \Omega | T\{\phi_H(x_1)\cdots\phi_H(x_n)\}|\Omega\rangle$$ función de correlación de n-puntos

$$= \frac{\langle 0|T\{\phi_I(x_1)\cdots\phi_I(x_n)\exp(-i\int_{-\infty}^{\infty}dt\, H_I)\}|0\rangle}{\langle 0|T\{\exp(-i\int_{-\infty}^{\infty}dt\, H_I)\}|0\rangle}$$

se calcula con $|0\rangle$ y $\phi_I(x)$

$$\phi_I(x) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\left(a_{\vec{p}}e^{-ip\cdot x} + a^\dagger_{\vec{p}}e^{ip\cdot x}\right)$$

$$= \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x)$$

$a_{\vec{p}}|0\rangle = 0$

$\phi_I^+|0\rangle = 0$

se calcula en expansión perturbativa

$$H_I = \int d^3x\, \mathcal{H}_I$$

en teoría $\lambda\phi^4$, $\mathcal{H}_I = \frac{\lambda}{4!}\phi_I^4$

$$\exp\left(-i\int_{-\infty}^{\infty} dt\, H_I\right) = \exp\left(-i\int d^4x\, \mathcal{H}_I\right)$$

$$= \underbrace{1}_{\text{orden 0}} \underbrace{- i\int d^4z\, \mathcal{H}_I(z)}_{\text{orden 1}} + \underbrace{\frac{(-i)^2}{2}\int d^4z\, \mathcal{H}_I(z)\int d^4w\, \mathcal{H}_I(w)}_{\text{orden 2}} + \underbrace{\cdots}_{\cdots}$$

el problema es evaluar e.g.

$$\langle 0|\, T\{\phi_I(x_1)\cdots\phi_I(x_n)\,\phi_I^4(z)\}\,|0\rangle$$

Teorema de Wick

hay una relación entre ordenamiento temporal $T\{\phi_1 \cdots \phi_N\}$ y ordenamiento normal $:\phi_1 \cdots \phi_N:$

notación $\phi_1 = \phi_I(x_1)$

$$T\{\phi_1\phi_2\} = \begin{cases} \phi_1\phi_2, & t_1 > t_2 \\ \phi_2\phi_1, & t_2 > t_1 \end{cases}$$

, $:\phi_1 \cdots \phi_N: =$ producto con todos los $a_{\vec{p}}$, equiv ϕ_i^+, a la derecha

$$\langle 0 | :\phi_1 \cdots \phi_N: | 0 \rangle = 0$$

Def: contracción de 2 campos

$$\contraction{}{\phi_1}{\,}{\phi_2}\phi_1\,\phi_2 = D_F(x_1 - x_2) = \theta(x_1^0 - x_2^0)[\phi_1^+, \phi_2^-] + \theta(x_2^0 - x_1^0)[\phi_2^+, \phi_1^-]$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip\cdot(x_1 - x_2)}$$

Se demuestra

$$T\{\phi_1\cdots\phi_N\} = :\phi_1\cdots\phi_N: \; + \; :\text{todas las contracciones posibles}:$$

Ejemplos

$$T\{\phi_1\phi_2\} = :\phi_1\phi_2: + \contraction{}{\phi_1}{}{\phi_2}\phi_1\phi_2 \qquad \Rightarrow \quad \langle 0|T\{\phi_1\phi_2\}|0\rangle = \contraction{}{\phi_1}{}{\phi_2}\phi_1\phi_2 = D_F(x_1-x_2)$$

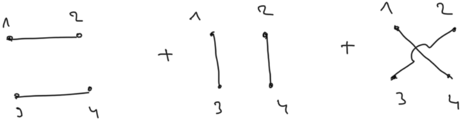
$$\begin{aligned}
T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} = {} & :\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4: \\
& + :\contraction{}{\phi_1}{}{\phi_2}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction{}{\phi_1}{\phi_2}{\phi_3}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction{}{\phi_1}{\phi_2\phi_3}{\phi_4}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction{\phi_1}{\phi_2}{}{\phi_3}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction{\phi_1}{\phi_2}{\phi_3}{\phi_4}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction{\phi_1\phi_2}{\phi_3}{}{\phi_4}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4: \\
& + :\contraction{}{\phi_1}{}{\phi_2}\contraction{\phi_1\phi_2}{\phi_3}{}{\phi_4}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction{}{\phi_1}{\phi_2}{\phi_3}\contraction[2ex]{\phi_1}{\phi_2}{\phi_3}{\phi_4}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction[2ex]{}{\phi_1}{\phi_2\phi_3}{\phi_4}\contraction{\phi_1}{\phi_2}{}{\phi_3}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4:
\end{aligned}$$

$$\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle = D_F(x_1-x_2)D_F(x_3-x_4) + D_F(x_1-x_3)D_F(x_2-x_4) + D_F(x_1-x_4)D_F(x_2-x_3$$

Diagramas de Feynman

$$\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\}|0\rangle = \overline{\phi_1\phi_2} = D_F(x_1-x_2) =$$

$$\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle =$$



$$= D_F(x_1-x_2)D_F(x_3-x_4) + D_F(x_1-x_3)D_F(x_2-x_4) + D_F(x_1-x_4)D_F(x_2-x_3)$$

* Por cada operador externo en x_i se dibuja un punto
* se ven las maneras de unir puntos a pares sin dejar sueltos (corresponde a las maneras de contraer totalmente)
* Cada union (= contracción = propagador) se representa por una línea entre los puntos

Se quiere evaluar términos en la expansión perturbativa, e.g.

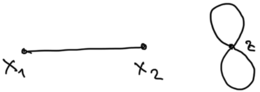
$$\langle 0 | T\left\{ \phi(x_1)\,\phi(x_2) \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right) \int d^4z\, \phi(z)\,\phi(z)\,\phi(z)\,\phi(z) \right\} | 0 \rangle$$

con

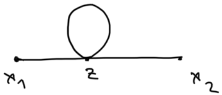
patas externas

vértice (4 patas $\phi^4(z)$)

se arman todos los diagramas en los cuales todas las patas quedan unidas a pares



$+$



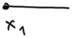
cada diagrama se transcribe usando reglas de Feynman

1. 

$= D_F(x_1 - x_2)$

2. 

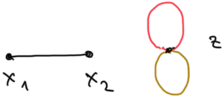
$= (-i\lambda) \int d^4z$

3. 

$= 1$

4. se divide por factor de simetría

Ejemplo



$$= \frac{(-i\lambda)}{8} \int d^4z \, D_F(x_1 - x_2) D_F(z-z) D_F(z-z)$$

Notar que el integrando no depende de z, $\int d^4z \sim VT$

ocurre siempre que en el diagrama hay "burbujas de vacío" (subdiagramas desconectados de todos los puntos externos).

$\int d^4z \to \infty$ corresponde a $\delta^{(4)}(0)$ en espacio de momentos

$$\sim (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_1 - p_2)$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4(0)$$

$$= \int d^4z \sim VT$$

Factor de simetría

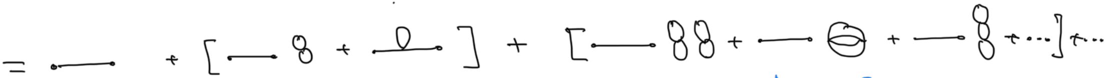
calculando $3\left(\frac{-i\lambda}{4!}\right) = \frac{-i\lambda}{8}$

"visual"

$2 \times 2 \times 2$

Funciones de correlación y diagramas conexos

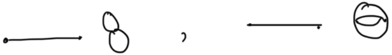
$$(*)\quad \langle 0| T\left\{ \phi(x_1)\,\phi(x_2)\exp\left(-\frac{i\lambda}{4!}\int d^4z\,\phi^4(z)\right)\right\}|0\rangle$$



tarea 3

incluye diagramas disconexos (con subdiagramas desconectados de x_1, x_2)

e.g.



, etc

hay burbujas de vacío proporcionales a $(2\pi)^4\delta^{(4)}(0) = \int d^4z$

Estas burbujas también aparecen en el denominador de

$$\langle\Omega| T\{\phi_H(x_1)\phi_H(x_2)\}|\Omega\rangle = \frac{(*)}{\langle 0| T\{\exp(-\frac{i\lambda}{4!}\int d^4z\,\phi^4)\}|0\rangle}$$

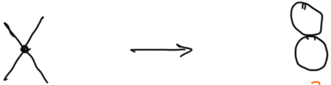
tiene expansión perturbativa

$$\langle 0 | T\left\{ \exp\left(-\frac{i\lambda}{4!}\int d^4z\, \phi^4\right)\right\} | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | 1 - \frac{i\lambda}{4!}\int d^4z\, \phi^4(z) + \frac{1}{2}\left(-\frac{i\lambda}{4!}\right)^2 \int d^4z \int d^4w\, T\left\{\phi^4(z)\,\phi^4(w)\right\} + \dots | 0 \rangle$$

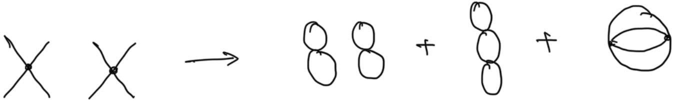
se calcula orden por orden usando teorema de Wick

λ : un vértice



3

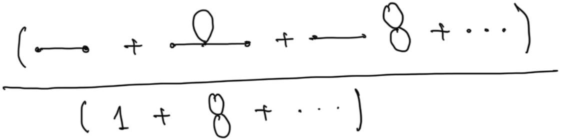
λ^2 : dos vértices



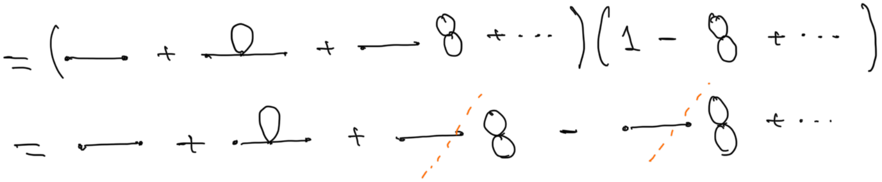
9 72 24

En $$\frac{\langle 0 | T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\exp(-\frac{i\lambda}{4!}\int d^4z\,\phi^4)\}|0\rangle}{\langle 0 | T\{\exp(-\frac{i\lambda}{4!}\int d^4z\,\phi^4)\}|0\rangle}$$ se cancelan las burbujas

"demo"

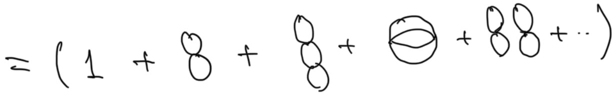


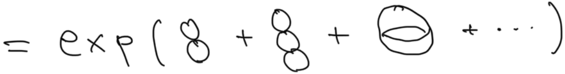
$$\frac{1}{1+r} = 1 - r + \cdots, \quad r \ll 1$$



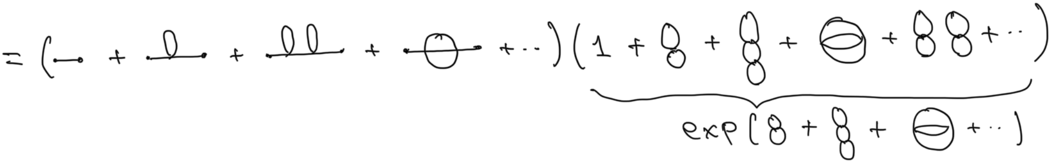
Se demuestra

$$\langle 0|T\left\{\exp\left(-\frac{i\lambda}{4!}\int d^4z\,\phi^4\right)\right\}|0\rangle$$





$$\langle 0|T\left\{\phi(x_1)\phi(x_2)\exp\left(-\frac{i\lambda}{4!}\int d^4z\,\phi^4\right)\right\}|0\rangle$$



exp(burbujas) se cancela en el cociente

$$\langle \Omega | T\{\phi_H(x_1) \cdots \phi_H(x_n)\} | \Omega \rangle$$

= Suma de todos los diagramas conectados con n puntos externos

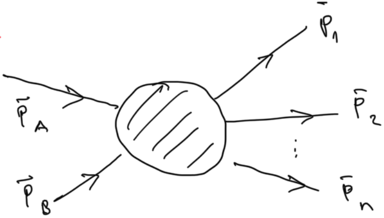
Ejemplo

$$\langle \Omega | T\{\phi_H(x_1)\, \phi_H(x_2)\} | \Omega \rangle =$$

Tarea 3: comprobar, transcribir usando reglas de Feynman

SCATTERING

estado inicial
o entrante (in)
$t \to -\infty$



estado final
o saliente (out)
$t \to \infty$

estado $|\vec{p}_A, \vec{p}_B\rangle_{in}$: partículas de momento definido, muy separadas

chocan (interactúan), salen partículas de momento $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots$,
observadas mucho después, lejos del lugar de interacción $\to$ estado $|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots\rangle_{out}$

La amplitud de probabilidad de transición es

$${}_{out}\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_{in} \equiv \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | S | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle$$

$\leftarrow$ aquí $|\vec{p}_A \vec{p}_B\rangle$, $|\vec{p}_1 \vec{p}_2\rangle$ definidos en un tiempo de referencia común

S : matriz S

Si no hay interacciones, $S = 1$, la parte no trivial viene de la matriz $\mathcal{T}$ definida por

$$S = 1 + i\mathcal{T}$$

S, y por lo tanto $\mathcal{T}$, debe incluir $\delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum p_f)$ por conservación de momento y energía.

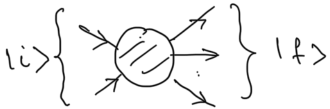
$p_1 + p_2 + \cdots + p_n$

Se define la matriz $\mathcal{M}$

$$\langle \bar{p}_1 \bar{p}_2 \cdots | i\mathcal{T} | \bar{p}_A \bar{p}_B \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum p_f)\, i\mathcal{M}(p_A, p_B \to p_f)$$

$\mathcal{M}$ se calcula usando diagramas de Feynman

$\mathcal{M}$ y sección eficaz



simplificando notación

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f)\,\mathcal{M}_{fi}$$

1) rata de transición para ir de $|i\rangle$ a $|f\rangle$

$$R_{fi} = \frac{1}{T}\left(\frac{|S_{fi}|^2}{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle}\right)$$

probabilidad por unidad de tiempo

T: tiempo total del experimento

la interacción viene de $\mathcal{M}_{fi}$. la norma cuadrada incluye

$$\left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f)\right]^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f) * (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i)$$

$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - f_f) * (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0)$$

$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f) * VT$$

V: volumen total del experimento

al final los factores de V se cancelan. también aparecen en $\langle i|i\rangle$ y $\langle f|f\rangle$.

$$\langle \bar{p} | \bar{p}' \rangle = (2\pi)^3\, 2E_{\bar{p}}\, \delta^{(3)}(\bar{p} - \bar{p}')$$

$$\langle \bar{p} | \bar{p} \rangle = (2\pi)^3\, 2E_{\bar{p}}\, \delta^{(3)}(0) = 2E_{\bar{p}} V$$

$$\langle i|i\rangle = (2E_A V)(2E_B V)\ , \quad \langle f|f\rangle = (2E_1 V)(2E_2 V)\cdots(2E_n V)$$

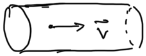
2) sección eficaz σ

$$\sigma = \frac{\text{rata de transición}}{\text{flujo incidente}}$$

área efectiva de choque

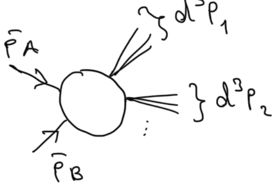
flujo incidente $=$ # de partículas incidentes por unidad de área por unidad de tiempo $= \dfrac{|\bar{v}|}{V}$

$= \dfrac{|\bar{v}_A - \bar{v}_B|}{V}$ en otro sistema



sistema en reposo de B

3) sección eficaz diferencial



$$d\sigma = \frac{R_{fi} V}{|\bar{v}_A - \bar{v}_B|} d\Pi$$

$$d\Pi = \left(\frac{V}{(2\pi)^3} d^3p_1 \right) \left(\frac{V}{(2\pi)^3} d^3p_2 \right) \cdots$$

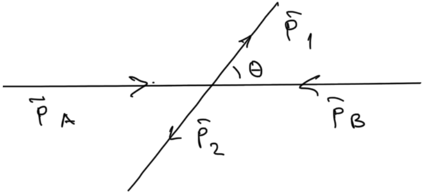
sustituyendo ...

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2E_A)(2E_B)|\bar{v}_A - \bar{v}_B|} d\Pi_{LIPS}$$

LIPS = Lorentz invariant Phase space

$$d\Pi_{LIPS} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum p_f) \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3(2E_1)} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3(2E_2)} \cdots \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3(2E_n)}$$

$$A + B \to 1 + 2 \quad \text{en} \quad CM$$



$$\vec{p}_A = -\vec{p}_B$$

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

$$E_A + E_B = E_1 + E_2 = E_{CM}$$

$$d\Omega = \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2} \frac{|\vec{p}_1|}{|\vec{p}_A|} \Theta(E_{CM} - m_1 - m_2)$$

si $m_1 = m_2 = m_A = m_B$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2}$$

M. Schwartz, Quantum Field Theory and the Standard Model

Próximamente

calcular $\mathcal{M}$ usando diagramas de Feynman http://laconga.redclara.net

contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA **physics**

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea