

# Módulo de Teoría

## Clase 12, 02-03-2021

Anamaría Font V.

Universidad Central de Venezuela

LA-CoNGA-physics

`mattermost.redclara.net@afont`



Latin American alliance for  
Capacity building in Advanced physics  
**LA-CoNGA physics**



Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea



# Recap + clase 11



$$\sim \int d^4k \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

tiene divergencia UV

$$\sim \int dk \frac{k^3}{k^4} = \int \frac{dk}{k}$$

divergencia logaritmica



## Grado de divergencia superficial D



$$\sim \int d^4k_1 \dots \int d^4k_L \frac{1}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \dots \frac{1}{k_I^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$L = \#$  lazos

$I = \#$  líneas internas

$$\sim \int dk k^{D-1}$$

$$D = 4L - 2I$$

$D < 0$  integral superficialmente convergente

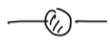
$D \geq 0$  integral ~~divergente~~



En  $\lambda\phi^4$ ,  $D = 4 - E$

sólo depende de  $E = \#$  de líneas externas  
independiente de  $V = \#$  de vértices

solo dos tipos con  $D \geq 0$



$D=2$   
 $E=2$



e.g.   ...

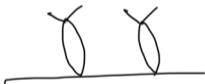
$D=0$   
 $E=4$



e.g.   ...

\*  $E > 4 \Rightarrow D < 0$  pero el diagrama puede ser divergente

e.g.



contiene sub-diagrama divergente

teorema de Weinberg: un diagrama es convergente si su grado de divergencia superficial, y el de todos sus subdiagramas es negativo.

\*  $D = 4 - E$  porque  $\lambda$  es adimensional, i.e. tiene dimensión de masa 0  
tarea 4,  $\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda_5}{5!} \phi^5$ ,  $[\lambda_5] = -1$ ,  $D$  aumenta con  $V$   
infinitos diagramas divergentes

\* 3 tipos de comportamiento UV

tipo de teoría	dimensión de constante de acopl	divergencias # finito de diagramas	ejemplos
super renormalizable	$> 0$	diverge superficialmente	$\lambda_3 \phi^3$
renormalizable	$= 0$	# finito de amplitudes diverge superficialmente, divergencias ocurren a todo orden	$\lambda \phi^4$ QED
no-renormalizable	$< 0$	todas las amplitudes divergen a un orden suficientemente grande	$\lambda_5 \phi^5$ gravedad

\* en una teoría renormalizable las divergencias se absorben en un número finito de parámetros, equivalentemente en un número finito de contraterminos

## Regularización

Después de rotación de Wick  $k^0 = i k_4$

\* Cut-off  $\Lambda$

$$\int k^{D-1} dk \rightarrow \int^{\Lambda} k^{D-1} dk, \quad \Lambda \text{ tiene unidades de energía (masa)}$$

Ej.  $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - c^2 + i\epsilon)^2} = \frac{i}{16\pi^2} \left( \log \frac{\Lambda^2}{c^2} - 1 + \dots \right)$

... = términos que se anulan para  $\Lambda^2 \gg c^2$

$$\log = \ln$$

\* regularización dimensional

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}, \quad \epsilon = 4 - d$$

Para mantener  $\lambda$  adimensional se introduce un parámetro  $\mu$  (masa)

$$\lambda \rightarrow \lambda \mu^\epsilon \Rightarrow \lambda \mu^\epsilon \phi^4 \text{ tiene dimensión } d = [L] \text{ ejercicio}$$

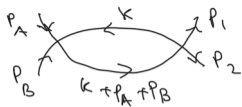
Ej.  $\lambda^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - c^2 + i\epsilon)^2} \rightarrow \lambda^2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - c^2 + i\epsilon)^2}$

$$= \frac{i\lambda^2 \mu^\epsilon}{16\pi^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{c^2} \right)^{\epsilon/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \quad \epsilon = 4-d, \quad \gamma = 0.5772\dots$$

$$= \frac{i\lambda^2 \mu^\epsilon}{16\pi^2} \left\{ \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \log \frac{4\pi\mu^2}{c^2} + \dots \right) \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \dots \right) \right\} \quad \dots = \text{términos de orden } \epsilon$$

$$= \frac{i\lambda^2 \mu^\epsilon}{16\pi^2} \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log \frac{c^2}{\mu^2} + \dots \right) \quad \text{divergencias} = \text{polos en } \epsilon$$

Regresamos a



$$p = p_A + p_B, \quad s = (p_A + p_B)^2$$

$$iM_2(s) = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2 - i\epsilon}$$

se usa el truco de Feynman:  $\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2}$

luego se cambia variable a  $l = k + xp$


$$iM_2(s) = \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - c^2 + i\epsilon)^2}, \quad c^2 = m^2 - x(1-x)s$$

evaluada anteriormente  

$$I = \frac{i}{16\pi^2} \log \frac{\Lambda^2}{c^2} + \dots$$

$$iM_2(s) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log \frac{\Lambda^2}{m^2 - x(1-x)s}$$

$$iM_2(s) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \log \frac{\Lambda^2}{s}, \quad s \gg m^2$$

 en regularización dimensional

como antes se llega a

$$iM_2(s) = \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - c^2 + i\epsilon)^2}, \quad c^2 = m^2 - x(1-x)s$$

→ evaluada anteriormente

$$\frac{i\mu^2}{16\pi^2} \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma + 4\pi - \log \frac{c^2}{\mu^2} + \dots \right)$$

$$iM_2(s) = \frac{i\lambda^2 \mu^2}{16\pi^2 \epsilon} - \frac{i\lambda^2 \mu^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[ \gamma - \log 4\pi + \log \left( \frac{m^2 - x(1-x)s}{\mu^2} \right) \right]$$

esquema MS (minimal subtraction)  
contratérmino absorbe polo en  $\epsilon$

esquema  $\overline{MS}$  (modified MS)  
contratérmino absorbe polo en  $\epsilon$   
y  $-\gamma + \log 4\pi$



# Renormalización

Volvemos a la amplitud  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$  en  $\lambda\phi^4$

Refs. Zee, III-1  
Schwartz 15.4

$$i\mathcal{M} = \text{X} + \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$i\mathcal{M}_2(s)$        $i\mathcal{M}_2(t)$        $i\mathcal{M}_2(u)$

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[ \log \frac{\Lambda^2}{s} + \log \frac{\Lambda^2}{t} + \log \frac{\Lambda^2}{u} \right] + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

problema aparente:  $\mathcal{M}$  depende de  $\Lambda \rightarrow \infty$

solución: entender el significado de  $\lambda$

$\lambda$  determina la magnitud de la interacción  $\phi^4$

Para medir  $\lambda$  se hace un experimento  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$  y se mide  $d\sigma/d\Omega$  a ciertos valores  $s_0, t_0, u_0$ . Como  $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \mathcal{M}^2$

efectivamente se mide  $\mathcal{M}$ , pero  $\mathcal{M}$  también incluye las correcciones en  $\lambda^2$ . Lo que se mide se define como un  $\lambda$  renormalizado  $\lambda_R$  (o  $\lambda_p$ , p de physical en Zee) y por lo tanto

$$-i\lambda_R = -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[ \log \frac{\Lambda^2}{s_0} + \log \frac{\Lambda^2}{t_0} + \log \frac{\Lambda^2}{u_0} \right] + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

Esta ecuación relaciona la  $\lambda$  en el Lagrangiano  $\mathcal{L}$  con el valor observado  $\lambda_R$

$$\lambda_R = \lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2} L_0, \quad L_0 = \log \frac{\Lambda^2}{s_0} + \log \frac{\Lambda^2}{t_0} + \log \frac{\Lambda^2}{u_0}$$

Para despejar  $\lambda$ ,  $\lambda = \lambda_R + a \lambda_R^2 + O(\lambda_R^3)$

$$\lambda_R = \lambda_R + a \lambda_R^2 - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} L_0 + \dots \quad \Rightarrow \quad a = \frac{L_0}{32\pi^2}$$

$$\lambda = \lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} L_0 + O(\lambda_R^3)$$

se sustituye en  $\mathcal{M} = -\lambda + \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \underbrace{\left( \log \frac{\Lambda^2}{s} + \log \frac{\Lambda^2}{t} + \log \frac{\Lambda^2}{u} \right)}_L + O(\lambda^3)$

$$\mathcal{M} = -\left( \lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} L_0 \right) + \frac{\left( \lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} L_0 \right)^2}{32\pi^2} L + O(\lambda_R^3)$$

daria  $\lambda_R^3, \lambda_R^4$  pero es  $O(\lambda_R^3)$

$$\mathcal{M} = -\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} (L - L_0) + O(\lambda_R^3)$$

$$L - L_0 = \left( \log \frac{\Lambda^2}{S} + \log \frac{\Lambda^2}{t} + \log \frac{\Lambda^2}{u} \right) - \log \left( \frac{\Lambda^2}{S_0} + \log \frac{\Lambda^2}{t_0} + \log \frac{\Lambda^2}{u_0} \right)$$

$$\mathcal{M} = -\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \left( \log \frac{S_0}{S} + \log \frac{t_0}{t} + \log \frac{u_0}{u} \right) + O(\lambda_R^3)$$

finito, independiente de  $\Lambda$

además predice  $\mathcal{M}(S_1, t_1, u_1) - \mathcal{M}(S_0, t_0, u_0) = \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \left( \log \frac{S_0}{S_1} + \log \frac{t_0}{t_1} + \log \frac{u_0}{u_1} \right)$

# Divergencias en $G^{(2)}$

Ref. Zee, III.3

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ x_1 \quad x_2 \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{p} \\ \xrightarrow{k} \quad \xrightarrow{k} \\ x_1 \quad x_2 \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{p} \\ \textcircled{p+k+q} \\ \xrightarrow{k} \quad \xrightarrow{k} \\ x_1 \quad x_2 \end{array} + \dots$$

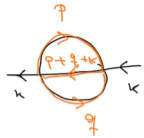
$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx_1} e^{ikx_2} \tilde{G}^{(2)}(k, -k) \leftarrow \text{transformada de Fourier}$$

$$\tilde{G}^{(2)} = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} I_1 \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} I_2 \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

$$I_1 = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = i\lambda C_1 \left( \Lambda^2 - m^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2} + \dots \right)$$



$$I_2 = \frac{(-i\lambda)^2}{6} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k+p+q)^2 - m^2 + i\epsilon}$$



Por invariancia de Lorentz

$$I_2 = D + E k^2 + F k^4 + \dots$$

$$D = I_2 \Big|_{k=0} \sim i C_2 \lambda^2 \Lambda^2 + \dots$$

D tiene divergencia cuadrática

Para determinar E se deriva respecto a  $r = k^2$ , luego se evalúa en  $k=0$

$$\frac{\partial I_2}{\partial r} = \frac{1}{2r} k^\mu \frac{\partial I_2}{\partial k^\mu} \xrightarrow{k=0} \int d^4 p \int d^4 q \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{[(p+q)^2 - m^2 + i\epsilon]^2}$$

divergencia logarítmica

$$E \sim i C_3 \lambda^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2} + \dots,$$

similarmente se obtiene que F es finita

$$I_2 = i\lambda^2 \left( C_2 \Lambda^2 + C_3 k^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) + \dots$$

$$\tilde{G}^{(2)} = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \left\{ 1 - \frac{\lambda c_1 \Lambda^2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - \frac{\lambda^2 (c_2 \Lambda^2 + c_3 k^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2})}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots \right\}$$

← serie geométrica

$$\tilde{G}^{(2)} = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \left( \frac{1}{1 + \frac{\lambda c_1 \Lambda^2 + \lambda^2 (c_2 \Lambda^2 + c_3 k^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2} + \dots)}{k^2 - m^2 + i\epsilon}} \right) \rightarrow O(\lambda^3)$$

$$\tilde{G}^{(2)} = \frac{i}{k^2 - m^2 + c_1 \lambda \Lambda^2 + c_2 \lambda^2 \Lambda^2 + c_3 \lambda^2 k^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2} + i\epsilon + \dots}$$

se concluye .

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{(1+b)k^2 - (m^2 - a) + i\epsilon}$$

$$a = \Lambda^2 (c_1 \lambda + c_2 \lambda^2 + \dots)$$

$$b = c_3 \lambda^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2} + \dots$$



$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{(1+b)^{-1}}{k^2 - \frac{(m^2 - a)}{1+b} + i\epsilon}$$

\* el polo en  $k^2$  se corre a  $m_R^2$  (o  $m_p^2$  en  $\mathbb{Z}ee$ )

$$m_R^2 = \frac{m^2 - a}{1+b} = m^2 + \delta m^2$$

renormalización de masa

$$m^2 = m_R^2 + C_1 \lambda \Lambda^2 + \dots$$

\* el residuo en el polo se modifica de 1 a  $(1+b)^{-1}$   
corresponde a renormalización del campo  $\phi$

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \dots \rightarrow \frac{1}{2} (1+b) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi.$$

$$\frac{1}{k^2 \dots} \rightarrow \frac{1}{(1+b)k^2 \dots}$$

en el propagador

## CONTRATÉRMINOS

Hasta ahora: se ajustan los parámetros originales, e.g.  $\lambda$  en términos de  $\lambda_R$ , o  $m$  en términos de  $m_R$ , tal que la dependencia en  $\Lambda$  desaparece

Funciona a orden  $\lambda^2$ . Para demostrar que funciona a todo orden se procede sistemáticamente incluyendo contratérminos en  $\mathcal{L}$  dependiente de  $\phi_R, m_R, \lambda_R$ :

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} m_R^2 \phi_R^2 - \frac{\lambda_R}{4!} \phi_R^4}_{\mathcal{L}_R} + \underbrace{\frac{1}{2} \delta_\lambda \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} \delta_m \phi_R^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi_R^4}_{\mathcal{L}_{CT}}$$

sólo se necesitan 3 contratérminos, todos de la forma de términos originales

Los coeficientes  $\delta_\lambda, \delta_m, \delta_\lambda$  dependen de  $\lambda_R$ , se determinan iterativamente

Ejemplo : amplitud  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$

$$i\mathcal{M} = \underbrace{X + \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3}}_{\text{se calculan con } \mathcal{L}_R} + \underbrace{\text{diagrama 4}}_{\text{contribución de } -\frac{\delta\lambda}{4!}\phi_R^4 \text{ en } \mathcal{L}_{CT}} + \dots$$

$$i\mathcal{M} = -i\lambda_R + \frac{i\lambda_R^2}{32\pi^2} \left[ \log \frac{\Lambda^2}{s} + \log \frac{\Lambda^2}{t} + \log \frac{\Lambda^2}{u} \right] - i\delta\lambda$$

$$\mathcal{M} \Big|_{s_0, t_0, u_0} = -\lambda_R \Rightarrow \delta\lambda = \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \left[ \log \frac{\Lambda^2}{s_0} + \log \frac{\Lambda^2}{t_0} + \log \frac{\Lambda^2}{u_0} \right]$$

sustituyendo

$$i\mathcal{M} = -i\lambda_R + \frac{i\lambda_R^2}{32\pi^2} \left[ \log \frac{s_0}{s} + \log \frac{t_0}{t} + \log \frac{u_0}{u} \right] + \mathcal{O}(\lambda_R^3)$$

igual que antes

Próximamente

reglas de Feynman con contraterminos

grupo de renormalización



<http://laconga.redclara.net>



[contacto@laconga.redclara.net](mailto:contacto@laconga.redclara.net)



lacongaphysics



Latin American alliance for  
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.